Matematici aplicate în economie.
Culegere de probleme

Cuprins

Prefață

Economiştii, indiferent de domeniul în care lucrează, au nevoie de cunoştințe solide de strictă specialitate, dar şi de tehnici specifice matematicii aplicate. Informația economică trebuie să fie relevantă, credibilă, inteligibilă - calități care sunt asigurate numai atunci când economistul care o construieşte, o prelucrează şi o valorifică stăpâneşte deopotrivă cunoştințe în domeniul respectiv, dar şi temeinice cunoştințe de matematici aplicate în economie.

Culegerea de probleme pe care o propunem celor interesați conține seturi de probleme rezolvate şi probleme propuse în vederea rezolvării, din următoarele domenii ale matematicii economice: algebră liniară, optimizări liniare, analiză, probabilități şi statistică matematică. Prin ea, autorii valorifică experiența acumulată la catedră în decursul unui număr însemnat de ani universitari.

Prezenta lucrare s-a elaborat în strânsă concordanță cu programa analitică a disciplinei "Matematici aplicate în economie" de la A.S.E. Bucureşti, indiferent de profilul facultății.

Culegerea de probleme se adresează în primul rând studenților economişti, dar şi studenților de la alte profile, cărora viitoarea profesie le solicită şi cunoştințe de matematici aplicate în economie.

Prin varietatea problemelor rezolvate sau propuse pentru a fi rezolvate, lucrarea constituie un ghid important pentru pregătirea examenelor la matematică de către studenții facultăților cu profil economic din învățământul de stat şi privat şi permite realizarea de acumulări în vederea practicării în condiții de performanță a muncii de economist. Nădăjduim ca economiştii practicieni să găsească în culegerea noastră numeroase soluții pentru eficientizarea managementului la nivel micro şi macroeconomic.

Suntem recunoscători conducerii Catedrei de Matematică din cadrul Academiei de Studii Economice Bucureşti, în cadrul căreia ne desfăşurăm activitatea, personal domnului profesor universitar doctor Gheorghe Cenuşă, din partea căruia noi, autorii, am primit un important sprijin şi prețioase sugestii legate de structura şi organizarea materialului.

Nutrim speranța ca cititorii să găsească în această culegere un sprijin real pentru studiu şi cercetare şi să ne transmită orice fel de semnale cu caracter de sugestie pentru îmbunătățirea conținutului său la edițiile viitoare.

Autorii

CAPITOLUL 1

METODA ELIMINĂRII COMPLETE (GAUSS-JORDAN)

Metoda eliminării complete se poate folosi, printre altele, pentru:

- rezolvarea unui sistem de ecuații liniare;
- calculul inversei unei matrice nesingulare.

Etapele aplicării acestei metode sunt:

1. Se alcătuieşte un tabel care conține matricea sistemului ce trebuie rezolvat (notată A) sau matricea ce trebuie inversată (A).
2. Se alege un element nenul al matricei A, numit pivot.
3. Elementele din tabel se modifică astfel:
   a) elementele de pe linia pivotului se împart la pivot;
   b) coloana pivotului se completează cu zero;
   c) restul elementelor se calculează după regula dreptunghiului:
   - se formează un dreptunghi, având elementul ce trebuie înlocuit şi pivotul ca vârfuri;
   - din produsul elementelor de pe diagonala pivotului se scade produsul elementelor celeilalte diagonale, iar rezultatul se împarte la pivot.

Schematic, regula dreptunghiului se prezintă astfel:

$$\begin{matrix} a & \ldots\ldots\ldots & x \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{b} & \ldots\ldots\ldots & c \end{matrix} \qquad x' = \frac{bx - ac}{b}, \quad \text{unde:}$$

$b =$ pivotul;
$x =$ elementul ce trebuie înlocuit;
$x' =$ noua valoare a elementului x.

d) (facultativ) dacă pe linia pivotului există un element egal cu zero, atunci coloana acelui element se copiază; analog, dacă pe coloana pivotului există un element egal cu zero, atunci linia acelui element se copiază.

4. Se reiau paşii 2 şi 3 până când de pe fiecare linie s-a ales câte un pivot.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare, folosind metoda eliminării complete: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$.

Rezolvare:
Vom folosi următoarea schemă:

A	b
……..	………
I_3	X

A			b
[-1]	2	-3	-2
2	-6	9	3
-3	2	2	-3
1	-2	3	2
0	[-2]	3	-1
0	-4	11	3
1	0	0	3
0	1	-3/2	1/2
0	0	[5]	5
1	0	0	3
0	1	0	2
0	0	1	1

Deducem că soluția sistemului este: $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

2. Să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare, folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Rezolvare:

A			b
4	1	1	9
3	[1]	0	6
5	2	1	11
[1]	0	1	3
3	1	0	6
-1	0	1	-1
1	0	1	3
0	1	-3	-3
0	0	[2]	2
1	0	0	2
0	1	0	0
0	0	1	1
I_3			X

Observație. Pentru simplificarea calculelor, am ales drept pivot mai întâi elementul al doilea al diagonalei principale (în cazul nostru,1).

Soluția sistemului este: $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$.

3. Să se determine, în cazul în care există, inversa matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

Deoarece $\det A \neq 0$, rezultă că matricea A este inversabilă.

Pentru determinarea inversei, vom folosi următoarea schemă:

A	I_3
……..	………
I_3	A^{-1}

A			I_3		
[2]	-1	3	1	0	0
0	4	1	0	1	0
3	1	5	0	0	1
1	-1/2	3/2	1/2	0	0
0	[4]	1	0	1	0
0	5/2	1/2	-3/2	0	1
1	0	13/8	1/2	1/8	0
0	1	1/4	0	1/4	0
0	0	[-1/8]	-3/2	-5/8	1
1	0	0	-19	-8	13
0	1	0	-3	-1	2
0	0	1	12	5	-8
I_3			A^{-1}		

Am obținut că $A^{-1} = \begin{pmatrix} -19 & -8 & 13 \\ -3 & -1 & 2 \\ 12 & 5 & -8 \end{pmatrix}$.

4. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare, folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \\ x_1 + 10x_2 = 21 \end{cases}.$$

Rezolvare:

A			b
-2	3	[-1]	3
5	4	2	15
1	10	0	21
2	-3	1	-3
[1]	10	0	21
1	10	0	21
0	-23	1	-45
1	10	0	21
0	0	0	0
I_3			X

Observații

- Metoda Gauss-Jordan constă în transformări succesive ale sistemului inițial în forme echivalente.
- În rezolvarea unui sistem prin această metodă nu este obligatoriu ca pivotul să fie ales de pe diagonala principală.

Din ultima iterație, rescriind sistemul, rezultă:

$\begin{cases} -23x_2 + x_3 = -45 \\ x_1 + 10x_2 = 21 \end{cases}$, care este un sistem compatibil simplu nedeterminat, având

soluția: $\begin{cases} x_2 = \alpha \\ x_1 = 21 - 10\alpha \\ x_3 = -45 + 23\alpha \end{cases}$, $\alpha \in R$.

5. Să se rezolve următorul sistem de ecuații liniare, folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 10x_3 = -10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Rezolvare:

A			*b*
5	-3	10	-10
3	2	4	1
[-1]	-7	2	6
0	-38	20	20
0	-19	[10]	19
1	7	-2	-6
0	0	0	-18
0	-19/10	1	19/10
1	16/5	0	-11/5

Aplicând metoda eliminării complete, am obținut următoarea formă echivalentă a sistemului:

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -18 \\ 0x_1 - \frac{19}{10}x_2 + x_3 = \frac{19}{10} \\ x_1 + \frac{16}{5}x_2 + 0x_3 = -\frac{11}{5} \end{cases}.$$

Din prima relație rezultă că sistemul este incompatibil.

6. Să se rezolve sistemul de ecuații liniare, folosind metoda eliminării complete:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}.$$

Rezolvare:

A				*b*
2	[-1]	1	2	1
1	1	2	1	2
3	-2	1	3	1
-2	1	-1	-2	-1
[3]	0	3	3	3
-1	0	-1	-1	-1
0	1	2	0	1
1	0	1	1	1
0	0	0	0	0

Aplicând metoda eliminării complete, am obținut următoarea formă echivalentă a sistemului:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases},$$ care este un sistem compatibil dublu nedeterminat.

Soluția sistemului este:

$$\begin{cases} x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_2 = 1 - 2\alpha \\ x_1 = 1 - \alpha - \beta \end{cases}, \text{ cu } \alpha, \beta \in R.$$

PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații liniare:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

R: $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5$.

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ -x_1 + 7x_2 - 6x_3 = -27 \end{cases}$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{9}{11},\ x_3 = \frac{39}{11}$.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

R: Sistemul este incompatibil.

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 16 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$

R: $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$.

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

R: $x_1 = -\frac{5}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{5}{3},\ x_2 = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{4}{3},\ x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta;\ \alpha, \beta \in R$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 14 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$

R: $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = -2,\ x_4 = -2$

Să se determine inversele matricelor:

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **R:** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **R:** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **R:** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ **R:** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & 1 & \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} & 1 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$

CAPITOLUL 2

SPAȚII VECTORIALE

2.1. NOȚIUNEA DE SPAȚIU VECTORIAL

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Se numeşte *spațiu vectorial* peste un corp K, o mulțime nevidă V dotată cu două operații, $+ : V \times V \to V$ şi $\cdot : K \times V \to V$, cu proprietățile:

I. $(V,+)$ grup abelian;

II. $a)$ $(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x \in V$;

$b)$ $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,\ \forall \alpha \in K,\ \forall x, y \in V$;

$c)$ $(\alpha\beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x),\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall x \in V$;

$d)$ $1_K \cdot x = x, \forall x \in V$, unde 1_K este elementul neutru al operației de înmulțire din K.

Exemple de spații vectoriale:

- $\left(R^n, R\right)$ este *spațiul vectorial numeric real n-dimensional*, unde $R^n = \left\{ \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^t \,\middle|\, x_i \in R, i = \overline{1,n} \right\}$.
- $\left(M_{m,n}(R), R\right)$ este *spațiul vectorial real al matricelor de tipul* (m,n) *cu elemente numere reale.*
- $\left(R[X], R\right)$ este *spațiul vectorial real al polinoamelor în nedeterminata* X*, cu coeficienți reali.*

- $(R_n[X], R)$ este *spațiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult* n, *în nedeterminata* X, *cu coeficienți reali.*
- $(F[a,b], R)$ este *spațiul vectorial real al funcțiilor reale definite pe intervalul* $[a,b]$.

Definiția 2. Fie (V,K) un spațiu vectorial şi $W \subset V, W \neq \varnothing$.
Spunem că W este *subspațiu vectorial* al spațiului vectorial (V,K) dacă:

1) $\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$;
2) $\forall \alpha \in K, x \in W \Rightarrow \alpha \cdot x \in W$.

Observație. Un subspațiu vectorial are o structură de spațiu vectorial în raport cu operațiile induse.

PROBLEME REZOLVATE

1. Considerăm operațiile:
$\oplus : R_+^* \times R_+^* \to R_+^*$ şi $\otimes : R \times R_+^* \to R_+^*$,
$x \oplus y = x \cdot y$, $\alpha \otimes x = x^\alpha$, $\forall x, y \in R_+^*, \forall \alpha \in R$, unde "$\cdot$" este înmulțirea numerelor reale.

Să se arate că R_+^* împreună cu cele două operații formează un spațiu vectorial real.

Rezolvare:

Verificăm condițiile din definiția 1.

I. *a*) Fie $x, y \in R_+^*$; rezultă că $x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$, conform comutativității înmulțirii numerelor reale.

$b)$ Fie $x, y, z \in R_+^*$; rezultă că

$$(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \oplus (y \oplus z),$$

în baza asociativității înmulțirii numerelor reale.

$c)$ Numărul real 1 este elementul neutru față de operația $\oplus$:

$$x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1 \cdot x = x, \forall x \in R_+^*.$$

$d)$ $\forall x \in R_+^*, \exists x^{-1} = \frac{1}{x} \in R_+^*$ astfel încât

$$x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

II. $a)$ Fie $\alpha, \beta \in R, x \in R_+^*$. Rezultă că

$$(\alpha + \beta) \otimes x = x^{\alpha + \beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x.$$

$b)$ Fie $\alpha \in R, x, y \in R_+^*$. Rezultă că:

$$\alpha \otimes (x \oplus y) = (x \oplus y)^{\alpha} = (x \cdot y)^{\alpha} = x^{\alpha} \cdot y^{\alpha} = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y).$$

$c)$ Fie $\alpha, \beta \in R,\ x \in R_+^*$. Rezultă că:

$$(\alpha\beta) \otimes x = x^{\alpha\beta} = x^{\beta\alpha} = \left(x^{\beta}\right)^{\alpha} = \alpha \otimes \left(x^{\beta}\right) = \alpha \otimes (\beta \otimes x).$$

$d)$ Fie $x \in R_+^*$; rezultă că: $1_R \otimes x = x^1 = x$.

Conform definiției 1, din I și II rezultă că R_+^* împreună cu cele două operații formează un spațiu vectorial real.

2. Să se arate că mulțimea

$$V = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \,\middle|\, x_i \in R, i = \overline{1,n},\ x_1 + x_{n-1} = 0 \right\},$$ împreună cu

adunarea vectorilor din R^n și înmulțirea acestora cu scalari, formează un spațiu vectorial real.

Rezolvare:

Deoarece $V \subset R^n$ și $\left(R^n, R\right)$ este spațiu vectorial, conform

observației din breviarul teoretic este suficient de arătat că V este un subspațiu vectorial al spațiului $\left(R^n, R\right)$.

1) Fie $x, y \in V$. Rezultă că $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$, $x_i, i = \overline{1,n}$, cu $x_1 + x_{n-1} = 0$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$, $y_i \in R, i = \overline{1,n}$, cu $y_1 + y_{n-1} = 0$. Avem că:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)^t, x_i + y_i \in R, i = \overline{1,n}$,

$(x+y)_1 + (x+y)_{n-1} = x_1 + y_1 + x_{n-1} + y_{n-1} = 0$, prin urmare $x + y \in V$.

2) Fie $\alpha \in R, x \in V$. Rezultă că:

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)^t, \alpha x_i \in R, i = \overline{1,n},$

$(\alpha x)_1 + (\alpha x)_{n-1} = \alpha x_1 + \alpha x_{n-1} = \alpha(x_1 + x_{n-1}) = 0$, deci $\alpha x \in V$.

Conform definiției 2, din 1) şi 2) rezultă că V este un subspațiu vectorial al spațiului $\left(R^n, R\right)$, deci V este spațiu vectorial real.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că mulțimea $C_{[a,b]}(R) = \left\{f \mid f : [a,b] \to R, f \text{ continuă pe } [a,b]\right\}$, împreună cu operațiile de adunare a funcțiilor şi de înmulțire a funcțiilor cu scalari formează un spațiu vectorial peste R.

2. Să se arate că mulțimea $M_{m,n}(R)$ a matricelor cu m linii şi n coloane şi elemente numere reale are o stuctură de spațiu vectorial real în raport cu operațiile de adunare a matricelor şi de înmulțire a acestora cu scalari reali.

3. Să se arate că mulţimea

$$A=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix};\ a,b,c,d\in R,\ c=a+b\right\}$$ împreună cu operaţiile

de adunare a matricelor şi de înmulţire a acestora cu scalari reali formează un spaţiu vectorial peste R.

4. Considerăm operaţiile: $\oplus:\left(R_{+}^{*}\right)^{2}\times\left(R_{+}^{*}\right)^{2}\to\left(R_{+}^{*}\right)^{2}$ şi $\otimes:R\times\left(R_{+}^{*}\right)^{2}\to\left(R_{+}^{*}\right)^{2}$, $(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)=(x_1\cdot y_1,\ x_2\cdot y_2)$, $\alpha\otimes(x_1,x_2)=\left(x_1^{\alpha},\ x_2^{\alpha}\right)$, $\forall x,y\in R_{+}^{*},\forall\alpha\in R$.

Să se studieze dacă $\left(R_{+}^{*}\right)^{2}$ împreună cu cele două operaţii formează un spaţiu vectorial real.

5. Să se arate că mulţimea $A=\left\{\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ b & a \end{pmatrix};a,b\in C\right\}$ (unde $\overline{a}$ reprezintă conjugatul numărului complex a), împreună cu operaţiile de adunare a matricelor şi de înmulţire a acestora cu scalari reali formează un spaţiu vectorial peste C.

6. Să se arate că următoarele mulţimi sunt subspaţii vectoriale ale spaţiilor vectoriale indicate:

a) $R_n[X]\subset R[X]$;

b) $\left\{(a,o,b)^t\,\middle|\,a,b\in R\right\}\subset R^3$;

c) $\left\{2aX^5+bX^2\,\middle|\,a,b\in R\right\}\subset R[X]$;

d) $\left\{(x_1,x_2,x_3)^t\,\middle|\,x_i\in R, i=\overline{1,3}, x_1=3x_2, x_1+x_2=x_3\right\}\subset R^3$.

Indicaţie. Se folosesc definiţiile noţiunilor de spaţiu şi subspaţiu vectorial, precum şi faptul că un subspaţiu vectorial are o structură de spaţiu vectorial în raport cu operaţiile induse.

2.2. DEPENDENȚA ŞI INDEPENDENȚA LINIARĂ A SISTEMELOR DE VECTORI

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Fie (V, K) un spațiu vectorial. Un *sistem* finit *de vectori* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ din V se numeşte *liniar independent* dacă $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ cu proprietatea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$, rezultă $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Definiția 2. Fie (V, K) un spațiu vectorial. Un *sistem* finit *de vectori* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ din V se numeşte *liniar dependent* dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$, nu toți nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$.

Propoziția 1. Un sistem de vectori din spațiul vectorial (R^n, R) este liniar independent dacă şi numai dacă rangul matricei având pe coloane vectorii sistemului este egal cu numărul de vectori.

Propoziția 2. Sistemul $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ este liniar dependent dacă şi numai dacă cel puțin un vector din sistem este o combinație liniară a celorlalți.

Propoziția 3. Orice subsistem al unui sistem de vectori liniar independent este liniar independent.

Propoziția 4. Orice suprasistem al unui sistem de vectori liniar dependent este liniar dependent.

Propoziția 5. Orice sistem de vectori care conține vectorul nul este liniar dependent.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ din spaţiul liniar (R^3, R).

a) Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenţi.

b) Să se determine o relaţie de dependenţă liniară între v_1, v_2, v_3.

c) Să se precizeze care dintre vectori se poate scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.

Rezolvare:

a) Conform definiţiei 2, trebuie să arătăm că există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$.

Înlocuind v_1, v_2, v_3 în această relaţie, rezultă:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi obţinem sistemul liniar omogen: $\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$.

Determinantul matricei sistemului este $\Delta = 0$, prin urmare sistemul admite şi soluţii nebanale, deci există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$.

Conform definiţiei 2, rezultă că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenţi.

b) O relaţie de dependenţă liniară între vectorii v_1, v_2, v_3 este o relaţie de forma: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu

toți nuli. Rezolvăm sistemul liniar omogen obținut la punctul $a)$.
Considerăm α_1, α_2 necunoscute principale şi $\alpha_3 = a,\ a \in R$, necunoscută secundară şi obținem: $\begin{cases} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = -a \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = -4a \end{cases}$, prin urmare soluția sistemului este: $\alpha_1 = -3a,\ \alpha_2 = -2a,\ \alpha_3 = a,\ a \in R$, iar o relație de dependență liniară între cei trei vectori este:
$-3av_1 - 2av_2 + av_3 = 0,\ a \in R^*$, sau, după simplificare,
$-3v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$.

$c)$ Deoarece vectorii sunt liniar dependenți, conform propoziției 2 rezultă că cel puțin un vector se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți. Din relația de dependență liniară găsită la punctul $b)$ rezultă că oricare dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți, astfel: $v_1 = -\frac{2}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3$,
$v_2 = -\frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_3$, $\quad v_3 = 3v_1 + 2v_2$.

2. $a)$ Să se arate că vectorii
$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ din spațiul liniar (R^3, R) sunt liniar independenți.

$b)$ Să se precizeze dacă vectorul v_2 se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți vectori.

Rezolvare:

$a)$ Conform definiției 1, trebuie să arătăm că oricare ar fi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$, rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Înlocuind v_1, v_2, v_3 în relația de mai sus, obținem:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ şi rezultă sistemul liniar omogen: $\begin{cases}4\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0\\-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\\\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}$.

Determinantul matricei sistemului este $\Delta=-25\neq 0$, prin urmare sistemul admite numai soluția banală: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

Conform definiției 1, rezultă că vectorii v_1,v_2,v_3 sunt liniar independenți.

b) *Observație*. Din propoziția 2 rezultă că într-un sistem de vectori liniar independent nici unul dintre vectori nu se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

Deoarece vectorii v_1,v_2,v_3 sunt liniar independenți, rezultă că v_2 nu se poate scrie ca o combinație liniară a vectorilor v_1 şi v_3.

3. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile liniare indicate:

a) $v_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ din (R^2,R);

b) $v_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ din (R^3,R);

c) $v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, v_4=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix}$ din (R^4,R).

Rezolvare:

a) *Metoda I* (folosind definiția). Fie $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R$ astfel încât

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Rezultă că:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi obţinem sistemul liniar

omogen: $\begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$.

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ şi are rangul 2, mai mic decât numărul de necunoscute, prin urmare sistemul este compatibil nedeterminat, deci admite şi soluţii nebanale, adică există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Conform definiţiei 2, rezultă că $\{v_1, v_2, v_3\}$ este un sistem de vectori liniar dependent.

Metoda II (folosind propoziţia 1).

Fie A matricea formată cu componentele vectorilor:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; avem că $rang\, A = 2$ şi este diferit de numărul de vectori din sistem, prin urmare $\{v_1, v_2, v_3\}$ este un sistem de vectori liniar dependent.

b) *Metoda I* (folosind definiţia). Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Rezultă că:

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi obţinem sistemul liniar omogen:

$\begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$.

Rangul matricei sistemului este 2, egal cu numărul de necunoscute, prin urmare sistemul este compatibil determinat, deci admite numai

soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
Conform definiției 1, rezultă că $\{v_1, v_2\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Metoda II (folosind propoziția 1).

Fie A matricea formată cu componentele vectorilor: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

$rang A = 2$ şi este egal cu numărul de vectori din sistem, prin urmare $\{v_1, v_2\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

c) *Metoda I* (folosind definiția). Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$$; determinantul matricei sistemului

este $\Delta = 24 \neq 0$, prin urmare sistemul admite numai soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Conform definiției 1, rezultă că $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Metoda II (folosind propoziția1).

Fie A matricea formată cu componentele vectorilor:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $rang A = 4 =$ numărul de vectori din sistem,

prin urmare $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este sistem de vectori liniar independent.

4. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile liniare indicate:

$a)\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix},\ a \in R$, din (R^3, R);

$b)\ g_1 = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\ g_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ g_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ a-1 \\ -2 \end{pmatrix},\ a \in R$, din (R^4, R).

Rezolvare:

Vom folosi propoziția 1 din breviarul teoretic.

$a)$ Fie A matricea având pe coloane vectorii v_1, v_2, v_3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & a \\ 4 & 9 & a^2 \end{pmatrix};\ \det A = -5(a-2)(a+3).$$

Dacă $a \in R \setminus \{-3, 2\}$, atunci $\det A \neq 0 \Rightarrow rangA = 3 =$ numărul de vectori, deci $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de vectori liniar independent.

Dacă $a \in \{-3, 2\} \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow rangA < 3 \Rightarrow rangA \neq$ numărul de vectori, deci $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de vectori liniar dependent.

$b)$ Fie A matricea având pe coloane vectorii g_1, g_2, g_3:

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 5 \\ -1 & a & 1 \\ 4 & 3 & a-1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$ Determinăm $rangA$. Avem că

$d_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ și fie d_3, d_3' minorii obținuți prin bordarea lui d_2.

$$d_3 = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 4 & 3 & a-1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9a+9 .$$

Dacă $a \in R \setminus \{-1\}$, atunci $d_3 \neq 0 \Rightarrow rangA = 3 =$ numărul de vectori, deci $\{g_1, g_2, g_3\}$ este sistem de vectori liniar independent.

Dacă $a = -1$, atunci $d_3 = 0$; avem că $d_3' = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 48 \neq 0$,

deci $rangA = 3 =$ numărul de vectori, prin urmare $\{g_1, g_2, g_3\}$ este sistem de vectori liniar independent.

În concluzie, vectorii g_1, g_2, g_3 sunt liniar independenți, $\forall a \in R$.

5. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile liniare indicate:

$a)$ $g_1 = 1-2X, g_2 = 2X-3X^2, g_3 = 2-6X+3X^2$ din $(R_3[X], R)$;

$b)$ $b_1 = 3-2i,\ b_2 = -4+i$ din (C, R);

$c)$ $f_1 = \sin x,\ f_2 = \cos x$, în (F, R), unde $F = \{\ f:[0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$;

$d)$ $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ în $(M_2(R), R)$.

Rezolvare:

Observație. Deoarece nici unul dintre sistemele de vectori din enunț nu aparține unui spațiu liniar de tipul (R^n, R), $n \in N^*$, nu se poate folosi propoziția 1 pentru a stabili natura acestora. Vom aplica definiția.

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0$;
obținem: $\alpha_1(1-2X) + \alpha_2(2X - 3X^2) + \alpha_3(2 - 6X + 3X^2) = 0$

și rezultă sistemul liniar omogen: $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$.

Determinantul matricei sistemului este $\Delta = 0$, prin urmare sistemul admite și soluții nebanale, adică există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toți nuli, astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0$.

Conform definiției 2, rezultă că g_1, g_2, g_3 sunt liniar dependenți.

b) Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât $\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = 0$; obținem: $\alpha_1(3 - 2i) + \alpha_2(-4 + i) = 0$ și rezultă sistemul liniar omogen:

$\begin{cases} 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$, care admite numai soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Conform definiției 1, rezultă că b_1, b_2 sunt liniar independenți.

c) Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$; din această egalitate de funcții rezultă că $\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0, \forall x \in [0, 1]$.
Pentru $x = 0$ obținem $\alpha_2 = 0$, iar pentru $x = \frac{\pi}{4}$ rezultă

$\alpha_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Conform definiției 1, rezultă că vectorii f_1, f_2 sunt liniar independenți.

d) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$,

adică $\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde

obținem sistemul liniar omogen: $\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 5\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$.

Rangul matricei este trei şi egal cu numărul de necunoscute, prin urmare sistemul este compatibil determinat, deci admite numai soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Conform definiției 1, rezultă că vectorii A_1, A_2, A_3 sunt liniar independenți.

6. În spațiul liniar (R^3, R) se consideră vectorii:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$v_6 = 3v_2 - 2v_3$.

Să se determine natura următoarelor sisteme de vectori şi când este posibil să se scrie o relație de dependență liniară între vectori: $a)\ \{v_1, v_2, v_3\}$; $b)\ \{v_1, v_3, v_4\}$; $c)\ \{v_2, v_3\}$; $d)\ \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $e)\{v_2, v_3, v_6\}$; $f)\{v_3, v_4, v_5\}$.

Rezolvare:

$a)$ *Metoda I* (folosind definiția). Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Rezultă că:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şi obținem sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Deoarece determinantul matricei sistemului $\Delta = -1 \neq 0$, rezultă că sistemul admite numai soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Conform definiției 1, rezultă că $\{v_1, v_2, v_3\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Metoda II (folosind propoziția 1).

Fie A matricea formată cu componentele vectorilor:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$; $\det A=-1\neq 0$, deci rangul matricei A este

trei, egal cu numărul de vectori din sistem, prin urmare $\{v_1,v_2,v_3\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

b) *Metoda I* (folosind definiția).

Fie $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_3+\alpha_3 v_4=0$, relație echivalentă cu $\alpha_1\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde

obținem sistemul liniar omogen: $\begin{cases} 3\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3=0 \\ -\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0 \\ 2\alpha_1+\alpha_2+4\alpha_3=0 \end{cases}$.

Deoarece determinantul matricei sistemului $\Delta=0$, rezultă că sistemul admite şi soluții nebanale, adică există $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R$, nu toți nuli, astfel încât $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_3+\alpha_3 v_4=0$.

Conform definiției 2, rezultă că $\{v_1,v_3,v_4\}$ este un sistem de vectori liniar dependent.

Metoda II (folosind propoziția 1).

Fie A matricea formată cu componentele vectorilor:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$; $\det A=0$; $d_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=8\neq 0$, deci rangul

matricei A este 2, diferit de numărul de vectori din sistem, prin urmare $\{v_1,v_3,v_4\}$ este un sistem de vectori liniar dependent.

O relație de dependență liniară între vectorii sistemului este de forma: $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_3+\alpha_3 v_4=0$, cu $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R$, nu toți nuli. Rezultă sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$; determinantul principal al sistemului:

$d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, deci α_1, α_2 necunoscute principale şi α_3 necunoscută secundară. Rezolvând sistemul, obținem:

$\alpha_1 = -3\lambda, \alpha_2 = 2\lambda, \alpha_1 = \lambda,$ cu $\lambda \in R$.

Prin urmare, o relație de dependență liniară între vectori este:

$-3\lambda v_1 + 2\lambda v_3 + \lambda_3 v_4 = 0$, $\lambda \in R^*$, sau $-3v_1 + 2v_3 + v_4 = 0$.

c) *Metoda I* (folosind definiția). Fie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$; de aici rezultă:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Rangul matricei sistemului liniar omogen obținut este 2, egal cu numărul necunoscutelor, prin urmare sistemul admite numai soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Conform definiției 1, rezultă că $\{v_2, v_3\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Metoda II (folosind propoziția 1).

Fie A matricea formată cu componentele vectorilor:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, deci rangul matricei A este 2, egal cu numărul vectorilor din sistem, prin urmare $\{v_2, v_3\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Metoda III. $\{v_2, v_3\}$ este un subsistem al sistemului de vectori liniar independenți $\{v_1, v_2, v_3\}$, de unde rezultă, conform propoziției 3, că $\{v_2, v_3\}$ sistem de vectori liniar independent.

$d)$ *Metoda I* (folosind definiția). Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases}; \ d_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$ prin

urmare rangul matricei sistemului este mai mic decât numărul de necunoscute, deci sistemul admite şi soluții nebanale, adică există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$, nu toți nuli, asfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$. Conform definiției 2, rezultă că $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este un sistem de vectori liniar dependent.

Metoda II (folosind propoziția1).

Fie A matricea formată cu componentele vectorilor:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \ d_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$ deci rangul

matricei A este trei, diferit de numărul de vectori din sistem, prin urmare $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este un sistem de vectori liniar dependent.

Metoda III. $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este un suprasistem al sistemului de vectori liniar dependenți $\{v_1, v_3, v_4\}$, de unde rezultă, conform propoziției 4, că $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este un sistem de vectori liniar dependent.

Determinăm o relație de dependență liniară:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$, cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$, nu toți nuli.

Rezolvând sistemul, obținem: $-3v_1 + 2v_3 + v_4 = 0$.

e) Se observă că în sistemul de vectori $\{v_2, v_3, v_6\}$ unul dintre vectori (v_6) este o combinație liniară a celorlalți doi: $v_6 = 3v_2 - 2v_3$. În baza propoziției 2, rezultă că sistemul de vectori $\{v_2, v_3, v_6\}$ este liniar dependent.
O relație de dependență liniară este: $v_6 = 3v_2 - 2v_3$, sau $3v_2 - 2v_3 - v_6 = 0$.

f) Deoarece sistemul de vectori $\{v_3, v_4, v_5\}$ conține vectorul nul, rezultă, conform propoziției 5, că este liniar dependent.
O relație de dependență liniară este: $0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + \lambda v_5 = 0$, $\lambda \in R^*$, sau $0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 = 0$.

7. Să se determine parametrul real m astfel încât vectorii
$v_1 = \begin{pmatrix} 3m-1 \\ 2m-1 \\ m+2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} m+1 \\ m+1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m-1 \\ m+2 \end{pmatrix}$ din spațiul liniar (R^3, R) să fie liniar independenți.

Rezolvare:
Conform propoziției 1 din breviarul teoretic, vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar independenți dacă şi numai dacă rangul matricei A având pe coloane componentele acestora este egal cu 3.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3m-1 & m+1 & 2 \\ 2m-1 & m+1 & 2m-1 \\ m+2 & -2 & m+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3m-3 & m+1 & 2 \\ 0 & m+1 & 2m-1 \\ 0 & -2 & m+2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(m-1)\left(m^2 + 3m + 2 + 4m - 2\right) = 3(m-1)m(m+7).$$

Avem că $rang\ A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \in R \setminus \{-7, 0, 1\}$.

8. Se consideră vectorii din spațiul liniar $\left(R_3[X],R\right)$:
$g_1 = 1 - 2X$, $g_2 = 2X - 3X^2$, $g_3 = 3X^2 - 4X^3$, $g_4 = 1 + 2X - 6X^2$.

Stabiliți în care din următoarele sisteme de vectori unul dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți: $a)\{g_1, g_2, g_3\}$; $b)\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$; $c)\{g_1, g_2, g_4\}$.

Atunci când este posibil, scrieți unul dintre vectorii sistemului ca o combinație liniară a celorlalți.

Rezolvare:

Se ştie (propoziția 2) că unul dintre vectorii unui sistem se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți dacă şi numai dacă sistemul este liniar dependent.

În consecință, problema revine la a studia natura fiecărui sistem de vectori.

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1(1-2X) + \alpha_2(2X-3X^2) + \alpha_3(3X^2-4X^3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + (-2\alpha_1 + 2\alpha_3)X + (-3\alpha_2 + 3\alpha_3)X^2 - 4\alpha_3 X^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$, adică sistemul de vectori

este liniar independent şi prin urmare nici unul dintre vectori nu se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

b) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât

$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 + \alpha_4 g_4 = 0$; de aici rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ -3\alpha_2 + 3\alpha_3 - 6\alpha_4 = 0 \\ -4\alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$, deci

sistemul de vectori este liniar independent şi nici unul dintre vectori nu se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

$c)$ Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \quad + \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0 \end{cases}$; deoarece determinantul matricei sistemului este $\Delta = 0$, rezultă că sistemul admite şi soluții nebanale, deci $\{g_1, g_2, g_4\}$ este un sistem de vectori liniar dependent şi în acest caz rezultă că unul dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți. Rezolvând sistemul de mai sus, obținem: $\alpha_1 = -\lambda,\ \alpha_2 = -2\lambda,\ \alpha_3 = \lambda$, cu $\lambda \in R$.

O relație de dependență liniară între aceşti vectori este: $-\lambda v_1 - 2\lambda v_3 + \lambda_3 v_4 = 0$, $\lambda \in R^*$, sau $-v_1 - 2v_3 + v_4 = 0$, de unde putem scrie unul dintre vectori ca o combinație liniară a celorlalți astfel: $v_1 = -2v_3 + v_4$ sau $v_3 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_4$ sau $v_4 = v_1 + 2v_3$.

9. Fie vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $a \in R$, din spațiul liniar (R^3, R). Să se determine parametrul a astfei încât vectorul v_2 să fie o combinație liniară a vectorilor v_1 şi v_3.

Rezolvare:

Vectorul v_2 este o combinație liniară a vectorilor v_1 şi v_3 dacă există $\alpha, \beta \in R$ astfel încât $v_2 = \alpha v_1 + \beta v_3$, ceea ce revine la faptul că sistemul: $\begin{cases} -6\alpha + 4\beta = 3 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \\ -9\alpha + 6\beta = a \end{cases}$ este compatibil. Fie A matricea sistemului şi $\overline{A}$ matricea extinsă. Avem că $rang A = 1$, $rang \overline{A} \geq 2$, deci sistemul este incompatibil, $\forall a \in R$. Prin urmare, nu există $a \in R$ astfel ca v_2 să fie o combinație liniară a vectorilor v_1 şi v_3.

10. Să se studieze natura următorului sistem de vectori din spațiul liniar (R^4, R) şi atunci când este posibil să se scrie unul dintre vectori ca o combinație liniară a celorlalți:
$v_1 = (m,1,1,1)^t, v_2 = (1,m,1,1)^t, v_3 = (1,1,m,1)^t, v_4 = (1,1,1,m)^t; m \in R.$

Rezolvare:
Fie A matricea formată cu componentele vectorilor:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}; \det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+3)(m-1)^3.$$

- Dacă $m \in R \setminus \{-3,1\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 4 =$ numărul de vectori, deci $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este un sistem de vectori liniar independent.
- Dacă $m \in \{-3,1\}$, atunci $\det A = 0$, deci rang $A \neq$ numărul de vectori, deci $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este sistem de vectori liniar dependent.

În acest caz, determinăm o relație de dependență liniară între vectorii sistemului: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = 0$.
Pentru $m = -3$ se obține sistemul compatibil simplu nedeterminat:

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

, cu soluția $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \lambda$, $\lambda \in R$.

O relație de dependență liniară este: $\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 + \lambda v_4 = 0$, $\lambda \in R^*$, sau $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$, de unde putem scrie unul dintre vectori ca o combinație liniară a celorlalți: $v_1 = -v_2 - v_3 - v_4$.
Pentru $m = 1$ se obține sistemul compatibil triplu nedeterminat:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\end{cases}, \text{ cu soluția}$$

$\alpha_1=-\beta-\gamma-\delta, \alpha_2=\beta, \alpha_3=\gamma, \alpha_4=\delta$, cu $\beta,\gamma,\delta\in R$. Rezultă relația de dependență liniară:
$(-\beta-\gamma-\delta)v_1+\beta v_2+\gamma v_3+\delta v_4=0$, cu $\beta,\ \gamma,\ \delta\in R$, nu toți nuli.
Dacă avem, de exemplu, $\beta\neq 0$, putem scrie vectorul v_2 ca o combinație liniară a celorlalți: $v_2=\dfrac{\beta+\gamma+\delta}{\beta}v_1-\dfrac{\gamma}{\beta}v_3-\dfrac{\delta}{\beta}v_4$.

11. Fie vectorii:
$A_1=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 4\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & a\end{pmatrix}$ din spațiul liniar $(M_2(R),\ R)$, unde $a\in R$. Determinați parametrul a astfel încât: $a)$ cei patru vectori să fie liniar independenți;

$b)$ vectorul A_4 să se poată scrie ca o combinație liniară a vectorilor A_1, A_2, A_3.

Rezolvare:
$a)$ Fie $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$ astfel încât

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3+\alpha_4A_4=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4=0\\ a\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3-3\alpha_4=0\\ 4\alpha_1+2\alpha_2+a\alpha_4=0\end{cases};$$

vectorii sunt liniar independenți dacă din relația de mai sus rezultă că toți scalarii sunt nuli, adică dacă sistemul obținut admite numai soluția banală. Rezultă de aici că determinantul matricei sistemului

trebuie să fie nenul. Avem că $\Delta = -2(a-3)^2$, de unde obținem că $a \in R \setminus \{3\}$.

b) *Metoda I.* Vectorul A_4 se poate scrie ca o combinație liniară a vectorilor A_1, A_2, A_3 dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $A_4 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2 \\ a\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = -3 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \end{cases}$.

Trebuie aflată valoarea parametrului $a \in R$ astfel încât sistemul obținut să fie compatibil. Determinantul format din elementele ultimilor două linii și coloane ale matricei sistemului este nenul, deci $rang\, A \geq 2$. Prin bordarea acestuia obținem doi determinanți de ordinul trei: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ și $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 6a$.

Pentru $a = 3$, obținem că $rang\, A = 2 = rang\, \overline{A}$, deci sistemul este compatibil. Pentru $a \neq 3$, avem că $rang\, A = 3$ și $rang\, \overline{A} = 4$, deci sistemul este incompatibil. Prin urmare, $a = 3$.

Metoda II. Conform propoziției 2, o condiție necesară pentru ca vectorul A_4 să se poată scrie ca o combinație liniară a celorlalți vectori este ca A_1, A_2, A_3, A_4 să fie liniar dependenți, adică $a = 3$. Verificăm dacă pentru $a = 3$ există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $A_4 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = -3 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \end{cases}$.

Avem că $rang\, A = rang\, \overline{A} = 2$, deci sistemul este compatibil.

În concluzie, A_4 se poate scrie ca o combinație liniară a vectorilor A_1, A_2, A_3 dacă şi numai dacă $a = 3$.

12. Se consideră vectorii liniar independenți f_1, f_2, f_3 din spațiul vectorial (V, R) şi următoarele combinații liniare ale acestora: $g_1 = -3f_1 + 2f_2 - f_3$, $g_2 = -2f_1 + f_2 - 3f_3$, $g_3 = -f_1 + 3f_2 - 2f_3$, $g_4 = f_1 - f_2 - 2f_3$. Stabiliți natura următoarelor sisteme de vectori:
a) $\{g_1, g_2, g_4\}$; *b*) $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$; c) $\{g_2, g_3, g_4\}$.

Rezolvare:

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_4 = 0 \Rightarrow$ $\alpha_1(-3f_1 + 2f_2 - f_3) + \alpha_2(-2f_1 + f_2 - 3f_3) + \alpha_3(f_1 - f_2 - 2f_3) = 0 \Rightarrow$ $(-3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3)f_1 + (2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)f_2 + (-\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3)f_3 = 0$.
Deoarece vectorii f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenți, rezultă că toți coeficienții acestora din relația de mai sus sunt nuli:
$\begin{cases} -3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$; determinantul matricei sistemului obținut

este: $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, prin urmare sistemul admite şi soluții nebanale, deci există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$, nu toți nuli, astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_4 = 0$.
Rezultă că vectorii $\{g_1, g_2, g_4\}$ sunt liniar dependenți.

b) $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este suprasistem al unui sistem de vectori liniar dependent $(\{g_1, g_2, g_4\})$, prin urmare, conform propoziției 4, $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ este un sistem de vectori liniar dependent.

$c)$ Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_2 + \alpha_2 g_3 + \alpha_3 g_4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1(-2f_1 + f_2 - 3f_3) + \alpha_2(-f_1 + 3f_2 - 2f_3) + \alpha_3(f_1 - f_2 - 2f_3) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (-2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)f_1 + (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3)f_2 + (-3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3)f_3 = 0$.
Cum vectorii f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenți, rezultă că toți coeficienții acestora din relația obținută mai sus sunt nuli:

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases};$$

determinantul matricei sistemului este $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$,

prin urmare sistemul admite numai soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Rezultă că vectorii $\{g_2, g_3, g_4\}$ sunt liniar independenți.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră vectorii

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$ din spațiul liniar (R^3, R).

$a)$ Să se arate că vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenți.

$b)$ Să se determine o relație de dependență liniară între v_1, v_2, v_3.

$c)$ Să se precizeze care dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți vectori.

R: $b)$ $3v_1 + 2v_3 = 0$; $c)$ v_1 și v_3: $v_1 = 0v_2 - \frac{2}{3}v_3$; $v_3 = -\frac{3}{2}v_1 + 0v_2$.

2. *a*) Să se arate că vectorii

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ din spațiul liniar (R^3, R)

sunt liniar independenți.

b) Să se precizeze care dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți vectori.

R: *b*) nici unul.

3. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile liniare indicate:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ din (R^2, R);

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ din (R^3, R);

c) $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ din (R^4, R).

R: *a*) sistem de vectori liniar dependenți (s.v.l.d.);

b) sistem de vectori liniar dependenți (s.v.l.d.);

c) sistem de vectori liniar independenți (s.v.l.i.).

4. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile liniare indicate:

a) $g_1 = 3 - X + X^2,\ g_2 = 1 + 2X + 3X^2, g_3 = 1 - 4X - 5X^2$ din $(R_3[X], R)$;

b) $b_1 = 1 + 3i,\ b_2 = 2 - i,\ b_3 = 7 - 4i$ din (C, R);

$c)$ $f_1 = \sin x,\ f_2 = \cos 2x$, în (F, R), unde
$F = \{ f : [0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$;

$d)$ $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ în $(M_2(R), R)$;

$e)$ $f_1 = e^{2x},\ f_2 = e^{3x}$, în (F, R), unde
$F = \{ f : [0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$;

$f)$ $f_1 = \cos x,\ f_2 = \cos 3x,\ f_3 = \cos^3 x$, în (F, R), unde
$F = \{ f : [0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$;

R: $a)$ s.v.l.i.; $b)$ s.v.l.d.; $c)$ s.v.l.i.; $d)$ s.v.l.d.; $e)$ s.v.l.i.; $f)$ s.v.l.d.

5. Stabiliți natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile vectoriale indicate şi, atunci când este posibil, scrieți o relație de dependență liniară între vectori:

$a)$ în R^3: $x_1 = (2,-1,3)^t, x_2 = (1,-1,2)^t, x_3 = (0,1,-1)^t$;

$b)$ în R^4: $x_1 = (8,0,3,2)^t, x_2 = (6,0,0,1)^t, x_3 = (5,-7,5,3)^t$;

$c)$ în R^3: $x_1 = (3,1,-4)^t, x_2 = (2,-2,1)^t, x_3 = (4,-8,-3)^t, x_4 = (-1,1,3)^t$;

$d)$ în R^4: $x_1 = (0,1,2,-1)^t, x_2 = (1,2,-1,0)^t, x_3 = (0,2,-1,1)^t, x_4 = (4,6,1,3)^t$.

R: $a)$ s.v.l.d.; $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$; $b)$ s.v.l.i.;
$c)$ s.v.l.d.; $x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$; $d)$ s.v.l.i..

6. Să se cerceteze natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile vectoriale indicate, iar în caz de dependență liniară să se scrie o relație de dependență liniară între vectori:

$a)$ $v_1 = 1,\ v_2 = \sin x,\ v_3 = \sin^2 x$, în (F, R), unde
$F = \{ f : [0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$;

$b)$ $a_1 = \cos^2 x, a_2 = 15, a_3 = \sin^2 x$, în (F, R), unde
$F = \{ f : [0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$;

$c)$ $f_1 = 5X^2 - X, f_2 = 3X - 1, f_3 = -X^2 + 1$ în $\left(R_2[X], R\right)$;

$d)$ $z_1 = 5 - 7i,\ z_2 = 1 + i$ în $\left(C, R\right)$;

$e)$ $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ în $\left(M_2(R), R\right)$.

R: $a)$ s.v.l.i.; $b)$ s.v.l.d.; $15a_1 - a_2 + 15a_3 = 0$; $c)$ s.v.l.i.;

$d)$ s.v.l.i.; $e)$ s.v.l.d.; $A_1 + A_2 - A_3 = 0$.

7. Fie spațiul vectorial (V, K). Să se demonstreze că:

$a)$ sistemul de vectori $\{x, y, 0\} \subset V$ este liniar dependent;

$b)$ sistemul de vectori $\{x, y, x, z\} \subset V$ este liniar dependent;

$c)$ sistemul de vectori $\{a + c,\ b + c,\ a + b + 2c\} \subset V$ este liniar dependent.

R: $a)$ se arată că se poate scrie o relație de dependență liniară între vectori (de exemplu, $0 \cdot x + 0 \cdot y + \alpha \cdot 0 = 0$, cu $\alpha \in K, \alpha \neq 0_K$);

$b)$ $\alpha \cdot x + 0 \cdot y - \alpha \cdot y + 0 \cdot z = 0$, cu $\alpha \in K, \alpha \neq 0_K$.

8. Să se discute natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile liniare indicate, în funcție de valorile parametrului real m:

$a)$ $x_1 = (1,1,3)^t, x_2 = (1,m,1)^t, x_3 = (3,1,1)^t$, în $\left(R^3, R\right)$;

$b)$ $x_1 = (3,2,0)^t, x_2 = (2,0,m)^t, x_3 = (1,m,0)^t$, în $\left(R^3, R\right)$;

$c)$ $a_1 = (3,2,m)^t, a_2 = (2,m,3)^t, a_3 = (m,3,2)^t$, în $\left(R^3, R\right)$;

$d)$ $x_1 = (4,-m,-1,2)^t, x_2 = (2,0,-1,m)^t, x_3 = (m,-2,m,1)^t$, în $\left(R^4, R\right)$.

R: $a)$ s.v.l.i. pentru $m \in R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$; s.v.l.d. pentru $m \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

$b)$ s.v.l.i. pentru $m \in R \setminus \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$; s.v.l.d. pentru $m \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$;

$c)$ s.v.l.i. pentru $m \in R \setminus \{-5\}$; s.v.l.d. pentru $m \in \{-5\}$.

9. În spaţiul vectorial (V, R) se consideră vectorii liniar independenţi a, b, c.

Să se determine natura următoarelor sisteme de vectori:

$a)$ $\{a+b-2c,\ -a+2c,\ a+2b-3c\}$;

$b)$ $\{3a-2b-2c, -a+2b, a+2b-2c\}$.

R: $a)$ s.v.l.i.; $b)$ s.v.l.d..

10. În spaţiul vectorial (V, R) se consideră vectorii liniar independenţi a, b, c. Să se determine natura sistemelor de vectori:

$a)$ $\{-2a-c, b+c, 3a+2b-c\}$;

$b)$ $\{-a-2b, 4a+2b+c, 2a+b-2c\}$.

11. În spaţiul liniar (R^3, R) se consideră vectorii:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$v_6 = 4v_3 - 2v_4$.

Stabiliţi natura următoarelor sisteme de vectori şi, atunci când este posibil, scrieţi o relaţie de dependenţă liniară între vectori:

$a)\{v_1, v_2, v_3\}$; $b)\{v_1, v_3, v_4\}$; $c)\{v_2, v_3\}$; $d)\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $e)\{v_3, v_4, v_6\}$; $f)\{v_3, v_4, v_5\}$.

R: $a)$ s.v.l.i.; $b)$ s.v.l.d.; $c)$ s.v.l.i.; $d)$ s.v.l.d.; $e)$ s.v.l.d.; $f)$ s.v.l.d..

12. Să se studieze natura următorului sistem de vectori din spaţiul liniar (R^3, R) şi, atunci când este posibil, să se scrie unul dintre vectori ca o combinaţie liniară a celorlalţi:

$v_1 = (2m-1, m-2, m+1)^t$; $v_2 = (m-1, m-1, -m)^t$;

$v_3 = (2m-1, m-2, 2m-1)^t$.

Indicaţie. Se foloseşte propoziţia 1 din breviarul teoretic

13. Se consideră următorii vectori din spațiul liniar $(R_3[X], R)$:
$g_1 = 2 - X, g_2 = 4X - 3X^2, g_3 = X^2 - 3X^3, g_4 = 2 + 3X - 6X^2$.
Stabiliți în care din următoarele sisteme unul dintre vectori se poate scrie ca o combinație liniară a celorlalți: $a)\{g_1, g_2, g_3\}$;
$b)\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$; $c)\{g_1, g_2, g_4\}$. Atunci când este posibil, scrieți unul dintre vectorii sistemului ca o combinație liniară a celorlalți.
R: $b)$.

14. În spațiul liniar (R^3, R) se consideră vectorii:
$v_1 = (-1,1,2)^t, v_2 = (2,2,-1)^t, v_3 = (2,3,1)^t, v_4 = (4,-1,3)^t, v_5 = (1,3,1)^t$.
Determinați $k \in \overline{1,5}$ astfel încât sistemul de vectori:

$a)$ $\{v_1, v_2, v_k\}$ să fie liniar dependent;

$b)$ $\{v_2, v_k, v_4\}$ să fie liniar independent.

R: $a)$ $k \in \{1, 2, 5\}$; $b)$ $k \in \{1, 3, 5\}$.

15. Să se studieze natura următoarelor sisteme de vectori din spațiile liniare indicate:

$a)$ $v_1 = (m, 2, 2, ..., 2)^t$, $v_2 = (2, m, 2, ..., 2)^t$, . . . ,
$v_n = (2, 2, 2, ..., m)^t$ din (R^n, R); $m \in R$;

$b)$ $f_1 = 1$, $f_2 = 1 - X$, $f_3 = (1 - X)^2$,. . . ., $f_{n+1} = (1 - X)^n$ din $(R_n[X], R)$, $n \in N^*$;

$c)$ $g_1 = 1$, $g_2 = \cos x$, $g_3 = \cos^2 x$,…., $g_{n+1} = \cos^n x$ din (F, R), unde $F = \{ f : [0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$, $n \in N^*$;

$d)$ $f_1 = e^x$, $f_2 = e^{2x}$, $f_3 = e^{3x}$,…., $f_n = e^{nx}$ din (F, R), unde $F = \{ f : [0,1] \to R,\ f$ continuă pe $[0,1]\}$, $n \in N^*$.

R: $a)$ s.v.l.i. dacă $m \in R \setminus \{2 - 2n,\ 2\}$; s.v.l.d. dacă $m \in \{2 - 2n,\ 2\}$;
$b)$ s.v.l.i.; $c)$ s.v.l.i.; $d)$ s.v.l.i.

2.3. SISTEM DE GENERATORI BAZĂ A UNUI SPAȚIU VECTORIAL COORDONATELE UNUI VECTOR ÎNTR-O BAZĂ DATĂ

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Fie (V, K) un spațiu vectorial. O familie de vectori $G = \{v_i\}_{i \in I} \subset V$ se numeşte *sistem de generatori pentru V* dacă orice vector din V se poate scrie ca o combinație liniară cu vectori din G.

Definiția 2. Fie (V, K) un spațiu vectorial. Familia $B \subset V$ se numeşte *bază* a spațiului vectorial (V, K) dacă:

1) B este o familie liniar independentă;
2) B este un sistem de generatori pentru V.

Definiția 3. (V, K) este un *spațiu vectorial finit dimensional* sau *de tip finit* dacă are o bază finită.

Definiția 4. Fie (V, K) un spațiu vectorial finit dimensional. Se numeşte *dimensiunea spațiului vectorial* şi se notează cu *dim V* numărul de vectori ai unei baze.

Propoziția 1. Fie (V, K) un spațiu vectorial, $dim\, V = m$. Un sistem de vectori $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ din V formează bază a spațiului (V, K) dacă şi numai dacă este liniar independent.

Observația 1. Conform propoziției 1, rezultă că un sistem de vectori B formează o bază a spațiului liniar de tip finit (V, K) dacă şi numai dacă:

1) B este un sistem liniar independent;
2) $cardB = \dim V$ (unde $cardB$ reprezintă numărul de elemente al mulțimii B).

Propoziția 2. Fie (V, K) un spațiu vectorial de dimensiune finită. Atunci scrierea unui vector v într-o bază dată B este unică.

Definiția 5. Fie (V, K) un spațiu vectorial, $dim V = n$ şi $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o bază în acest spațiu.
Coordonatele vectorului x în baza B sunt scalarii $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ astfel încât $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$.

Vectorul $x_B = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^t$ se numeşte *vectorul coordonatelor lui x în baza B.*

Observația 2. Propoziția 1 din paragraful 2.2 referitoare la natura unui sistem de vectori din R^n poate extinde şi în cazul unui sistem de vectori dintr-un spațiu liniar real de tip finit, astfel:

Propoziția 3. Un sistem de vectori dintr-un spațiu liniar real de tip finit este liniar independent dacă şi numai dacă rangul matricei având pe coloane coordonatele vectorilor sistemului într-o bază oarecare a spațiului liniar este egal cu numărul de vectori.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se arate că mulţimea de vectori $G=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$, unde $g_1=(1,3,-2)^t$, $g_2=(-1,1,1)^t$, $g_3=(-2,2,-1)^t$, $g_4=(1,0,1)^t$, formează un sistem de generatori pentru spaţiul liniar $\left(R^3,R\right)$.

Rezolvare:
Conform definiţiei 1, $\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$ formează sistem de generatori pentru spaţiul liniar $\left(R^3,R\right)$ dacă $\forall v\in R^3,\exists\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$ astfel încât $v=\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3+\alpha_4 g_4$.

Fie $v=(a,b,c)^t\in R^3$; relaţia de mai sus devine:

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=a \\ 3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=b \\ -2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=c \end{cases};$$

rangul matricei sistemului este 3 şi este egal cu rangul matricei extinse, prin urmare sistemul este compatibil, deci există $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in R$ astfel încât $v=\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3+\alpha_4 g_4$.
Rezultă că $\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$este sistem de generatori pentru spaţiul liniar $\left(R^3,R\right)$.

2. Să se arate că mulţimea de vectori B formează o bază a spaţiului vectorial indicat şi să se determine coordonatele vectorului v în baza B:

a) $B=\{v_1=(3,-1,2)^t,v_2=(-2,1,1)^t,v_3=(-4,2,-1)^t\}$;
$(V,K)=\left(R^3,R\right)$; $v=(-1,2,5)^t$;

b) $B=\{f_1=1,f_2=(X+1),f_3=(X+1)^3,\ldots,f_{n+1}=(X+1)^n\}$;
$(V,K)=(R_n[X],R)$; $f=a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n$;

$c)\quad B=\left\{A_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\right\},$

$(V,K)=(M_2(R),R);\ v=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}.$

Rezolvare:

$a)$ Conform propoziției 1, avem de verificat două condiții:

1) $B=$ sistem de vectori liniar independent;

2) numărul vectorilor din mulțimea $B=$ dimensiunea spațiului din care fac parte vectorii.

1) Avem că $\begin{vmatrix}3&-2&-4\\-1&1&2\\2&1&-1\end{vmatrix}=-3\neq 0$, prin urmare rangul matricei formate cu componentele vectorilor $=3=$ numărul de vectori, deci B este sistem de vectori liniar independent;

2) $\text{card}\,B=3=\dim R^3$.

Din 1) şi 2) rezultă că B formează o bază a spațiului vectorial (R^3,R).

Determinăm coordonatele vectorului v în baza B.

Metoda I. Coordonatele vectorului v în baza B sunt scalarii $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in R$ astfel încât $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$. Rezultă sistemul: $\begin{cases}3\alpha_1-2\alpha_2-4\alpha_3=-1\\-\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=2\\2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=5\end{cases}$.

Rezolvând sistemul, obținem: $\alpha_1=3,\alpha_2=1,\alpha_3=2$.

Prin urmare, coordonatele vectorului v în baza B sunt: 3, 1, 2, sau $v_B=(3,\ 1,\ 2)^t$.

Metoda II. Din formula de reprezentare a unui vector într-o bază dată avem că: $v_B=A^{-1}\cdot v$, unde v_B reprezintă vectorul

coordonatelor lui v în baza B, iar A este matricea având pe coloane vectorii bazei. Folosind metoda Gauss-Jordan, obținem:

A			v
3	-2	-4	-1
-1	$\boxed{1}$	2	2
2	1	-1	5
$\boxed{1}$	0	0	3
-1	1	2	2
3	0	-3	3
1	0	0	3
0	1	2	5
0	0	$\boxed{-3}$	-6
1	0	0	3
0	1	0	1
0	0	1	2
I_3			$A^{-1}\cdot v$

Prin urmare, $v_B = (3,\ 1,\ 2)^t$.

b) 1) Fie $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1} \in R$ astfel încât

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_{n+1} g_{n+1} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 (X+1) + ... + \alpha_{n+1} (X+1)^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_n + C_n^1 \alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_{n-1} + C_{n-1}^1 \alpha_n + C_n^2 \alpha_{n+1} = 0 \\ .... \\ \alpha_2 + C_2^1 \alpha_3 + C_3^2 \alpha_4 + ... + C_n^{n-1} \alpha_{n+1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + ... + \alpha_n + \alpha_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_{n+1} = 0$, deci B este sistem de vectori liniar independent;

2) $card\, B = n+1 = \dim R_n[X]$.

Din 1) şi 2) rezultă că B este o bază a spațiului vectorial $R_n[X]$.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1} \in R$ coordonatele vectorului v în baza $B \Rightarrow$

$\Rightarrow f = a_0 + a_1 X + ... + a_a X^n = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 (1+X) + ... + \alpha_{n+1} (1+X)^n$ (*).

Pentru $x = -1 \Rightarrow \alpha_1 = f(-1)$.

Derivăm relația şi pentru $x = -1$ obținem că $\alpha_2 = f'(-1)$.

Repetând procedeul, obținem: $\alpha_3 = \dfrac{f''(-1)}{2}, \ldots, \alpha_{n+1} = \dfrac{f^{(n)}(-1)}{n!}$.

c) 1) Fie $\alpha_i \in R$, $i = \overline{1,4}$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_i A_i = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$; determinantul matricei sistemului este

$\Delta = 5 \neq 0$, deci sistemul admite numai soluția banală:

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, prin urmare B este un sistem de vectori liniar independent.

2) card $B = 4 = \dim M_2(R)$.

Din 1) şi 2) rezultă că B formează o bază a spațiului liniar $(M_2(R), R)$.

Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R$ astfel încât

$$v = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \dfrac{1}{5} \Rightarrow v_B = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right)^t$.

3. Se dau vectorii:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$v_6 = v_1 - 2v_2 + 3v_3$.

Să se determine care din următoarele mulțimi formează un sistem de generatori pentru spațiul vectorial (R^3, R): $a)\{v_1, v_2, v_3\}$; $b)\{v_1, v_3, v_4\}$; $c)\{v_2, v_3\}$; $d)\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$; $e)\{v_2, v_3, v_6\}$; $f)\{v_3, v_4, v_5\}$.

Din fiecare sistem de generatori să se extragă toate bazele posibile ale spațiului vectorial (R^3, R).

Să se verifice dacă scrierea unui vector din R^3 ca o combinație liniară a vectorilor ce formează sistemul de generatori este unică.

Rezolvare:

$a)$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ formează sistem de generatori dacă $\forall v \in R^3, \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

Fie $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in R^3$; relația de mai sus devine: $\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ 3\alpha_1 - 5\alpha_2 - \alpha_3 = c \end{cases}$;

determinantul sistemului este $\Delta = -20 \neq 0$, prin urmare sistemul este compatibil determinat, deci există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

Rezultă că $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de generatori; de asemenea, $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de vectori liniar independent, deci formează o bază a spațiului liniar (R^3, R). Conform propoziției 2, rezultă că

scrierea unui vector din R^3 ca o combinație liniară a vectorilor ce formează sistemul de generatori este unică.

b) Procedând analog, obținem că se poate găsi un vector $v \in R^3$ astfel încât sistemul să fie incompatibil, prin urmare $\{v_1, v_3, v_4\}$ nu este sistem de generatori.

c) În mod analog, rezultă că $\{v_2, v_3\}$ nu este sistem de generatori.

d) Am arătat la punctul *a*) că $\{v_1, v_2, v_3\}$ sistem de generatori, prin urmare rezultă că $\forall v \in R^3, \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \Rightarrow \forall v \in R^3, \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 0 \in R$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$.

Deoarece $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de generatori, rezultă că $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ este sistem de generatori. Cum $\dim R^3 = 3$, obținem că sistemul $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ nu este bază a spațiului R^3. Rămâne să verificăm prin calcule dacă scrierea unui vector din R^3 ca o combinație liniară a vectorilor ce formează sistemul de generatori este unică. Vom obține că această scriere nu este unică.
Deoarece $\dim R^3 = 3$, rezultă că numărul maxim de baze ce se pot forma cu vectorii din acest sistem este C_4^3. Notăm cu Δ_{jkl} determinantul format cu componentele vectorilor a_j, a_k, a_l. Avem $\Delta_{123} \neq 0$, $\Delta_{124} = 0$, $\Delta_{134} = 0$, $\Delta_{234} \neq 0$, deci bazele care se pot forma sunt: $\{v_1, v_2, v_3\}$ și $\{v_2, v_3, v_4\}$.
Pentru punctele *e*) și *f*) se procedează în mod similar.

4. Fie $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ o bază a unui spațiu liniar (V, R) de dimensiune trei și sistemul de vectori $G = \{g_1, g_2, g_3\} \subset V$.

Ştiind că $g_1 = -2f_1 - f_2 + f_3$, $g_2 = -f_1 + f_2 + 2f_3$, $g_3 = f_1 + f_3$, se cere:

a) să se arate că $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ formează o bază a spaţiului vectorial (V, R);

b) să se determine coordonatele vectorului $x = 3f_1 - 2f_2 + 4f_3$ în baza F.

c) să se determine coordonatele vectorului $y = 5g_1 - 3g_2 + 2g_3$ în baza F;

d) să se determine coordonatele vectorului $z = f_1 - 3f_2 + 2f_3$ în baza G.

Rezolvare:

a) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ astfel încât $\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3 = 0 \Rightarrow$
$\alpha_1(-2f_1 - f_2 + f_3) + \alpha_2(-f_1 + f_2 + 2f_3) + \alpha_3(f_1 + f_3) = 0 \Rightarrow$
$(-2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)f_1 + (-\alpha_1 - \alpha_2)f_2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)f_3 = 0$.
Deoarece vectorii f_1, f_2, f_3 sunt liniar independenţi, rezultă că toţi coeficienţii acestora din relaţia de mai sus sunt nuli:

$\begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$; determinantul matricei sistemului obţinut

este: $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, prin urmare sistemul admite numai

soluţia banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, deci $\{g_1, g_2, g_3\}$ este un sistem de vectori liniar independenţi. De asemenea, numărul de vectori din sistem este egal cu dimensiunea spaţiului liniar (V, R), prin urmare $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ formează o bază a spaţiului vectorial (V, R).

b) Avem că $x = 3f_1 - 2f_2 + 4f_3$, prin urmare, conform definiţiei,

coordonatele vectorului x în baza F sunt: $3, -2, 4$ sau $x_F = (3, -2, 4)^t$.

c) Avem că $y = 5g_1 - 3g_2 + 2g_3$. Trebuie să exprimăm vectorul y în funcție de vectorii bazei F. Folosind relațiile din enunț care exprimă vectorii bazei G în funcție de vectorii bazei F, obținem: $y = 5(-2f_1 - f_2 + f_3) - 3(-f_1 + f_2 + 2f_3) + 2(f_1 + f_3) = -5f_1 - 8f_2 + f_3$, deci, conform definiției, coordonatele vectorului y în baza F sunt: $-5, -8, 1$ sau $y_F = (-5, -8, 1)^t$.

d) Pentru a determina coordonatele vectorului $z = f_1 - 3f_2 + 2f_3$ în baza G putem folosi metoda Gauss-Jordan. Pornim de la reprezentarea vectorului z în baza F. Vom elimina, pe rând, câte un vector al bazei inițiale, pe care îl vom înlocui cu un vector al noii baze, G. Rezultă următorul tabel:

Baza	g_1	g_2 ↓	g_3	z
f_1	-2	-1	1	1
← f_2	-1	$\boxed{1}$	0	-3
f_3	1	2	1	2
f_1	-3	0	1 ↓	-2
g_2	-1	1	0	-3
← f_3	3	0	$\boxed{1}$	8
← f_1	$\boxed{-6}$ ↓	0	0	-10
g_2	-1	1	0	-3
g_3	3	0	1	8
g_1	1	0	0	5/3
g_2	0	1	0	- 4/3
g_3	0	0	1	3

În ultima iterație, în coloana vectorului z, s-au obținut coordonatele acestuia în baza G, prin urmare $z_G = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, 3\right)^t$.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că mulțimea de vectori $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, unde $a_1 = (-2, 0, 3)^t$, $a_2 = (5, 1, -1)^t$, $a_3 = (-3, 1, -2)^t$, $a_4 = (1, 6, 3)^t$, formează un sistem de generatori pentru spațiul liniar $\left(R^3, R\right)$.

2. Stabiliți care din sistemele următoare de vectori formează o bază a spațiului vectorial indicat:

$a)$ $v_1 = (3,1,2)^t, v_2 = (3,2,1)^t, v_3 = (4,3,1)^t$ în $\left(R^3, R\right)$;

$b)$ $v_1 = (1,2,3,4)^t, v_2 = (2,3,4,1)^t, v_3 = (1,0,-1,2)^t, v_3 = (1,2,0,-1)^t$ în $\left(R^4, R\right)$;

$c)$ $v_1 = -1 + 4i, v_2 = 3 + 2i$ în (C, R);

$d)$ $v_1 = X^2 + 3X - 3, v_2 = 4X^2 + X + 2, v_3 = 2X^2 - 5X + 8$ în $(R_2[X], R)$;

$e)$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ în $(M_2(R), R)$.

R: $a)$, $b)$, $c)$, $e)$.

3. Să se arate că mulțimea de vectori B formează o bază a spațiului vectorial indicat şi să se determine coordonatele vectorului v în baza B:

$a)$ $B = \{v_1 = (2, -1, 5)^t, v_2 = (-3, 1, 1)^t, v_3 = (-1, 1, 6)^t\}$; $(V, K) = \left(R^3, R\right); v = (5, -4, 4)^t$;

$b)$ $B = \{f_1 = 1, f_2 = (X-2), f_3 = (X-2)^2, \ldots, f_{n+1} = (X-2)^n\}$; $(V, K) = (R_n[X], R); f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$;

$c)\quad B=\left\{A_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 2 & 1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}4 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}\right\},$

$(V,K)=(M_2(R),R);\ v=\begin{pmatrix}11 & 1\\ 1 & 11\end{pmatrix}.$

4. Să se determine parametrul $m\in R$ astfel încât mulţimea de vectori B să formeze o bază a spaţiului liniar indicat:

$a)$ $B=\{v_1=(2,m,1)^t, v_2=(-1,1,m)^t, v_3=(1,2,2)^t\}$, (R^3,R);

$b)$ $B=\{f_1=1-X,\ f_2=m+X^2\}, (R_2[X], R)$;

$c)$ $B=\{z_1=m-2i, f_2=-1+mi\}$, $(C,\ R)$.

5. Se consideră sistemul de vectori din spaţiul liniar (R^3,R):

$B=\{v_1=(3,1,-2)^t, v_2=(-4,2,1)^t, v_3=(-1,1,2)^t\}$.

$a)$ Să se arate că B formează o bază a spaţiului liniar (R^3,R).

$b)$ Să se determine vectorul $v\in R^3$, ştiind că $v_B=(-2,\ 5,\ 6)^t$.

6. În spaţiul vectorial (R^3,R) se consideră vectorii:

$v_1=(3,\ 1,-1)^t, v_2=(2,0,1)^t, v_3=(1,-1,3)^t, v_4=(0,3,0)^t, v_5=(2,3,1)^t$.

Determinaţi $k\in\overline{1,5}$ astfel încât sistemul de vectori:

$a)$ $\{v_1,v_2,v_k\}$ să formeze o bază a spaţiului vectorial (R^3,R);

$b)$ $\{v_2,v_4,v_k\}$ să fie sistem de generatori pentru spaţiul vectorial (R^3,R).

R: $a)$ $k\in\{4,5\}$; $b)$ $k\in\{1,3\}$.

7. Fie $B_1=\{a_1,a_2,a_3\}$ o bază a unui spaţiu liniar (V,R)de dimensiune trei şi sistemul de vectori $B_2=\{b_1,b_2,b_3\}\subset V$.

Ştiind că $b_1 = a_1 - a_2 + 3a_3$, $b_2 = -3a_1 - 4a_2 + a_3$, $b_3 = 2a_1 + 3a_2 + 3a_3$, se cere:

a) să se arate că $B_2 = \{b_1, b_2, b_3\}$ formează o bază a spaţiului vectorial (V, R);

b) să se determine coordonatele vectorului $x = 2a_1 - a_2 + 4a_3$ în baza B_1.

c) să se determine coordonatele vectorului $y = -2a_1 + 5a_2 - 2a_3$ în baza B_2;

d) să se determine coordonatele vectorului $z = 4b_1 - b_2 - 2b_3$ în baza B_1.

R: *a*) Se foloseşte propoziţia 1 din breviarul teoretic.

b) $x_{B_1} = (2, -1, 4)^t$; *c*) $y_{B_2} = (-3, 1, 2)^t$; *d*) $z_{B_2} = (3, -6, 5)^t$.

8. Să se arate că mulţimea de vectori din spaţiul liniar (R^3, R) $G = \{g_1 = (1,1,0)^t, g_2 = (0,1,0)^t, g_3 = (-1,1,0)^t, g_4 = (0,1,1)^t\}$ este un sistem de generatori pentru spaţiul liniar (R^3, R) şi că scrierea vectorului $v = (1,0,0)^t$ ca o combinaţie liniară a vectorilor din G nu este unică.

9. Să se arate că sistemul de vectori $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ din spaţiul liniar (R^3, R) formează o bază a acestui spaţiu şi să se determine coordonatele vectorului x în această bază:

a) $a_1 = (-1,3,5)^t, a_2 = (1,-4,1)^t, a_3 = (-1,2,10)^t; x = (-2,4,21)^t$;

b) $a_1 = (-3,1,1)^t, a_2 = (1,-3,1)^t, a_3 = (1,1,-3)^t; x = (2,-1,-1)^t$.

R: Se foloseşte propoziţia 1 din breviarul teoretic;

a) $x_B = (2,1,1)^t$; *b*) $x_B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^t$.

10. Să se arate că sistemul de vectori B formează o bază a spaţiului liniar (V, K) şi să se determine coordonatele vectorului x în această bază pentru fiecare din cazurile următoare:

a) $(V,K)=\left(R^2,R\right),\ B=\left\{v_1=(1,2)^t, v_2=(-1,0)^t\right\}, x=(5,3)^t$;

b) $(V,K)=\left(R_3[X],R\right)$,

$B=\left\{f_1=1, f_2=X+1, f_3=X^3-X, f_4=2X^2-1\right\},\ x=1-X^2$;

c) $(V,K)=\left(M_3(R),R\right)$,

$$B=\left\{A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}, A_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, A_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\},$$

$$x=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix};$$

d) $(V,K)=\left(R^3,R\right)$,

$B=\left\{v_1=(1,2,-1)^t, v_2=(-1,0,1)^t, v_2=(2,0,1)^t\right\},\ x=(2,2,1)^t$.

e) $(V,K)=(C,R),\ B=\{z_1=1+i, z_2=4-3i\},\ x=2-5i$.

11. Se dau vectorii din spatiul liniar $\left(R^3,R\right)$:

$$v_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}, v_4=\begin{pmatrix}0\\3\\-6\end{pmatrix}, v_5=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$v_6=3v_1-2v_2+v_3$.

Care din următoarele mulţimi formează un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial $\left(R^3,R\right)$: $a)\{v_1,v_2,v_3\}$; $b)\{v_1,v_3,v_4\}$; $c)\{v_2,v_3\}$; $d)\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$; $e)\{v_2,v_3,v_6\}$; $f)\{v_3,v_4,v_5\}$.

Din fiecare sistem de generatori să se extragă toate bazele posibile ale spaţiului vectorial $\left(R^3,R\right)$.

Să se verifice dacă scrierea unui vector din R^3 ca o combinație liniară a vectorilor ce formează sistemul de generatori este unică.

12. În spațiul vectorial $\left(R^4, R\right)$ se consideră vectorii

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Să se completeze acest sistem de vectori până la o bază.

13. În spațiul vectorial $\left(R^2, R\right)$ se consideră vectorii:

$v_1 = (a,2)^t, v_2 = (3,4a+1)^t, v = (2,a)^t, a \in R$. Se știe că $\{v_1, v_2\}$ este bază, iar coordonatele vectorului v în această bază sunt egale cu -7 și 3. Să se determine valoarea parametrului a.

14. Fie spațiul vectorial $\left(R^2, R\right)$. Se consideră vectorii

$v_1 = (m,\ m-1)^t, v_2 = (3,\ 2)^t, u_1 = (5,\ 7)^t, u_2 = (3,\ 4)^t, m \in R$.
Un vector x are coordonatele 1 și $-m$ în baza $B_1 = \{v_1, v_2\}$, respectiv $m^2 + 2m - 1$ și $m^2 - 14m + 11$ în baza $B_2 = \{u_1, u_2\}$.
Să se determine valoarea parametrului m.

2.4. SUBSPAȚIUL VECTORIAL GENERAT DE O MULȚIME DE VECTORI

BREVIAR TEORETIC

Definiție. Fie (V, K) un spațiu vectorial de tip finit şi $M \subset V$, $M \neq \varnothing$. Se numeşte *acoperirea liniară a lui M* sau *subspațiul vectorial generat de M* şi se notează $L(M)$ sau $\langle M \rangle$ sau $Span(M)$ mulțimea: $L(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,\middle|\, n \in N^*, \alpha_i \in K, x_i \in M, i = \overline{1,n} \right\}$.

Propoziție. $L(M)$ este subspațiu vectorial al lui (V, K).

Observația 1. $L(M) = L(B)$, unde B este o familie liniar independentă, maximală, conținută în M.

Observația 2. Pentru a găsi o bază în $L(M)$ trebuie să căutăm în M o familie maximală de vectori liniar independenți.

PROBLEME REZOLVATE

1. În spațiul vectorial (R^3, R) se consideră vectorii:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Fie $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Se cere:

$a)$ să se afle $\dim L(M)$;

$b)$ să se precizeze dacă vectorii x, y aparțin sau nu spațiului vectorial $L(M)$;

$c)$ 1) să se dea exemplu de o bază B_1 pentru $L(M)$ astfel încât $B_1 \subset M$;

2) să se dea exemplu de o bază B_2 pentru $L(M)$ astfel încât $B_2 \subset R^3 \setminus M$;

3) să se dea exemplu de o bază B_3 pentru $L(M)$ astfel încât $B_3 \not\subset M$ şi $B_3 \cap M \neq \varnothing$.

Rezolvare:

$a)$ Conform observației 2 din breviarul teoretic, pentru a determina o bază în $L(M)$ trebuie să găsim în M un sistem maximal de vectori liniar independenți. Scriem matricea A ale cărei coloane sunt componentele vectorilor din M:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Determinăm un minor nenul de ordin maxim şi găsim $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, prin urmare un sistem maximal de vectori liniar independenți este $\{v_1, v_2\}$, deci $\dim L(M) = 2$.

$b)$ Avem că $L(M) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_5 v_5 \mid \alpha_i \in R, i = \overline{1,5}\}$. În baza observației 1, rezultă că $L(M) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in R\}$.

- $x \in L(M)$ dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât

$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}5\\9\\4\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5\\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 9\\ \alpha_1 + \alpha_2 = 4\end{cases}$$; obținem

$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1$, prin urmare $x \in L(M)$.

- $y \in L(M)$ dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ astfel încât

$y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1\\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1\\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\end{cases}$$; obținem că

sistemul nu are soluție, deci $y \notin L(M)$.

$c)$ 1) $B_1 = \{v_1, v_2\} \subset M$ şi B_1 bază (am arătat la punctul $a)$).

2) Fie $w_1 = 2v_1, w_2 = 3v_2$ şi $B_2 = \{w_1, w_2\} \subset R^3 \setminus M$ şi $\{w_1, w_2\}$ sistem de vectori liniar independenți, deci bază pentru $L(M)$ (deoarece $\dim L(M) = 2 =$ numărul de vectori din B_2).

3) $B_3 = \{v_1, w_2\}$, unde $w_2 = 3v_2$; avem $B_3 \not\subset M$ şi $B_3 \cap M \neq \emptyset$; în plus, $\{v_1, w_2\}$ este un sistem de vectori liniar independenți, deci bază pentru $L(M)$ (deoarece $\dim L(M) = 2 =$ = numărul de vectori din B_3).

2. În spațiul liniar (R^n, R) se consideră mulțimile X şi Y din R^n:

$a)$ $X = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \,/\, x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 = x_n\}$;

$b)$ $Y = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \,/\, x_i \in R \setminus Q, i = \overline{1,n}\}$.

Să se stabilească dacă X, Y sunt subspații ale spațiului vectorial (R^n, R) şi în caz afirmativ să se determine dimensiunile acestora.

Rezolvare:

a) Fie $x, y \in X \Rightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$, cu $x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 = x_n$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$, cu $y_i \in R, i = \overline{1,n}, y_1 = y_n$. Atunci $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)^t$, cu $x_i + y_i \in R, i = \overline{1,n}$ şi $x_1 + y_1 = x_n + y_n$, prin urmare $x + y \in X$.

Fie $\alpha \in R$ şi $x \in X \Rightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$, cu $x_i \in R, i = \overline{1,n}$, $x_1 = x_n$; avem că $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)^t$, cu $\alpha x_i \in R, i = \overline{1,n}$ şi $\alpha x_1 = \alpha x_n$, prin urmare $\alpha x \in X$ .Conform definiţiei, rezultă că X este subspaţiu vectorial al spaţiului liniar (R^n, R).

Dacă $x \in X \Rightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t, x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 = x_n$, deci $x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_1)^t$, prin urmare

$x = x_1 \cdot (1,0,0,.....,1)^t + x_2 \cdot (0,1,0,.....,0)^t + ... + x_{n-1} \cdot (00,0,.....,1,0)^t$; rezultă de aici că $X = L(\{g_1, g_2, ..., g_{n-1}\})$, unde

$g_1 = (1,0,0,.....,1)^t, g_2 = (0,1,0,.....,0)^t, ..., g_{n-1} \cdot (00,0,.....,1,0)^t$.

Pentru a determina dimensiunea spaţiului vectorial X, trebuie să găsim o bază în $X = L(G) = L(\{g_1, g_2, ..., g_{n-1}\})$, deci, conform observaţiei 2 din breviarul teoretic, trebuie să căutăm în G o familie maximală de vectori liniar independenţi.

Fie A matricea având drept coloane vectorii $g_1, g_2, ..., g_{n-1}$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0............. & 0 \\ 0 & 1 & 0............. & 0 \\ .... \\ 0 & 0 & 0............ & 1 \\ 1 & 0 & 0............ & 0 \end{pmatrix};$$

Deoarece determinantul format cu primele $n-1$ linii este nenul, rezultă că rangul matricei A este $n-1$ şi egal cu numărul vectorilor din G, prin urmare vectorii $g_1, g_2, ..., g_{n-1}$ sunt liniar independenți. Am obținut că $dim\, X = n-1$.

b) $Y = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \,/\, x_i \in R \setminus Q,\, i = \overline{1,n}\right\}$.

Fie $x = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, ..., \sqrt{2}\right)^t \in Y$ şi $\alpha = \sqrt{2} \in R$; rezultă

$\alpha x = (2,2,.....,2)^t \notin Y$, deci Y nu este subspațiu vectorial al spațiului liniar (R^n, R).

PROBLEME PROPUSE

1. Să se determine $dim\, L(A)$ în spațiul vectorial V şi să se stabilească dacă $v \in L(A)$:

a) $V = \left(R^4, R\right)$,

$A = \left\{a_1 = (0,-3,1,-1)^t, a_2 = (1,0,2,1)^t, a_3 = (1,3,1,2)^t\right\}$, $v = (2,3,-1,1)^t$;

b) $V = (R_4[X], R)$, $A = \{a_1 = X+1, a_2 = X^2 + X^4, a_3 = X^3,$

$a_4 = X^2 - X^4, a_5 = X^2 + 2X^3 + X^4\}$, $v = X^2 + X + 1$.

R: *a*) $dim\, L(A) = 2$, $v \notin L(A)$; *b*) $dim\, L(A) = 4$, $v \in L(A)$.

2. Fie $G = \left\{(a,b,c)^t \,/\, a - 3b + 2c = 0; a,b,c \in R\right\}$.

a) Să se arate că G este subspațiu al spațiului vectorial $\left(R^3, R\right)$.

b) Să se indice o bază a spațiului vectorial G şi să se determine dimensiunea acestuia.

R: *a*) Se foloseşte definiția subspațiului vectorial.

b) $dim\, G = 2$; $B = \left\{(3,1,0)^t, (-2,0,1)^t\right\}$.

3. În spațiul vectorial $\left(R^3, R\right)$ se consideră vectorii:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 19 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$ Fie

$M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Se cere:

a) să se calculeze $\dim L(M)$;

b) să se precizeze dacă vectorii x, y aparțin sau nu spațiului vectorial $L(M)$;

c) să se dea exemplu de:

1) o bază B_1 pentru $L(M)$ astfel încât $B_1 \subset M$;

2) o bază B_2 pentru $L(M)$ astfel încât $B_2 \subset R^3 \setminus M$;

3) o bază B_3 pentru $L(M)$ astfel încât $B_3 \not\subset M$ şi $B_3 \cap M \neq \varnothing$.

d) să se determine coordonatele vectorilor $a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ în bazele B_1, B_2, B_3.

4. În spațiul liniar $\left(R^n, R\right)$ se consideră mulțimile X, Y, Z:

$$X = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \,/\, x_i \in Z, i = \overline{1,n}\right\},$$

$$Y = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \,/\, x_i \in R, i = \overline{1,n},\; x_{n-1} = 2x_n\right\},$$

$$Z = \left\{x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t \,/\, x_i \in R, i = \overline{1,n}, x_1 + x_2 + ... + x_n = 0\right\}.$$

Să se stabilească dacă X, Y, Z sunt subspații ale spațiului

vectorial $\left(R^n, R\right)$ şi în caz afirmativ să se determine dimensiunile acestora.

R: X nu este subspațiu vectorial; Y şi Z sunt subspații vectoriale de dimensiune $n-1$

2.5. SCHIMBAREA COORDONATELOR UNUI VECTOR LA TRECEREA DE LA O BAZĂ LA ALTĂ BAZĂ

BREVIAR TEORETIC

Considerăm spațiul vectorial (V, K), $\dim V = n$. Fie $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ şi $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ două baze ale spațiului liniar (V, K).

Definiție. Se numeşte *matricea de trecere de la baza F la baza G* matricea care are drept coloane coordonatele vectorilor bazei *G* în baza *F*. Notând această matrice cu $C_{F,G}$, putem scrie:

$C_{F,G} = \left((g_1)_F \ \ (g_2)_F \ \ ....(g_n)_F \ \right)$.

Formula de transformare a coordonatelor unui vector $x \in V$ *la trecerea din baza F în baza G este:* $x_G = C_{F,G}^{-1} \cdot x_F$.

Observația 1. $C_{G,F} = (C_{F,G})^{-1}$.

Observația 2. În baza definiției, rezultă că matricea de trecere de la baza canonică a spațiului liniar $\left(R^n, R\right)$ la o altă bază F a acestui spațiu are pe coloane componentele vectorilor bazei F.

Observația 3. Fie spațiul liniar $\left(R^n, R\right)$ şi $x \in R^n$, E baza canonică şi *F*, *G* alte două baze ale acestui spațiu. Notăm cu *A* matricea de trecere de la baza E la baza F ($x_F = A^{-1} \cdot x_E$) şi cu *B* matricea de trecere de la baza E la baza G ($x_G = B^{-1} \cdot x_E$).

Formula de transformare a coordonatelor unui vector $x \in R^n$ *la trecerea din baza* F *în baza* G *este:* $x_G = B^{-1} A \cdot x_F$.

PROBLEME REZOLVATE

1. În spațiul liniar al polinoamelor de grad cel mult 3 şi coeficienți reali, $(R_3[X], R)$, considerăm bazele

$F = \{f_1 = 1, f_2 = X, f_3 = X^2, f_4 = X^3\}$ şi

$G = \{g_1 = -2 + 3X + X^2 - 5X^3, g_2 = 4 - X^2, g_3 = -X - 6X^3,$

$g_4 = 1 + 2X + 3X^2\}.$

Să se determine matricea de trecere de la baza F la baza G.

Rezolvare:

Conform definiției din breviarul teoretic, matricea de trecere de la baza F la baza G are pe coloane coordonatele vectorilor bazei G în baza F. Avem că:

$g_1 = (-2)\cdot f_1 + 3\cdot f_2 + 1\cdot f_3 + (-5)\cdot f_4 \Rightarrow (g_1)_F = (-2, 3, 1, -5)^t$;

$g_2 = 4\cdot f_1 + 0\cdot f_2 + (-1)\cdot f_3 + 0\cdot f_4 \Rightarrow (g_2)_F = (4, 0, -1, 0)^t$;

$g_3 = 0\cdot f_1 + (-1)\cdot f_2 + 0\cdot f_3 + (-6)\cdot f_4 \Rightarrow (g_3)_F = (0, -1, 0, -6)^t$;

$g_4 = 1\cdot f_1 + 2\cdot f_2 + 3\cdot f_3 + 0\cdot f_4 \Rightarrow (g_4)_F = (1, 2, 3, 0)^t$. Rezultă:

$$C_{F,G} = \left((g_1)_F \;\; (g_2)_F \;\; (g_3)_F \;\; (g_4)_F\right) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Fie $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ şi $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ două baze ale unui spațiu vectorial de dimensiune 3. Ştiind că $f_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 - e_2 + 2_3$, $f_3 = -2e_1 + e_3$, să se determine matricea de trecere de la baza F la baza E.

Rezolvare:

- Observăm că pe baza informațiilor din enunț se poate determina foarte uşor matricea de trecere de la baza *E* la baza *F*, notată $C_{E,F}$.

Din $f_1 = -3e_1 + 2e_2 - e_3$ rezultă că $(f_1)_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; analog obținem:

$(f_2)_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $(f_3)_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, prin urmare

$$C_{E,F} = \left((f_1)_E \;\; (f_2)_E \;\; (f_3)_E\right) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Pentru a obține matricea de trecere de la baza *F* la baza *E* vom folosi observația 1, conform căreia avem că $C_{F,E} = (C_{E,F})^{-1}$. Vom aplica metoda Gauss-Jordan.

$C_{E,F}$			I_3		
3	1	-2	1	0	0
2	-1	0	0	1	0
1	2	[1]	0	0	1
5	5	0	1	0	2
2	[-1]	0	0	1	0
1	2	1	0	0	1
[-5]	0	0	1	5	2
-2	1	0	0	-1	0
5	0	1	0	2	1
1	0	0	-1/5	-1	-2/5
0	1	0	-2/5	-3	-4/5
0	0	1	1	7	3
I_3			$C_{F,E}$		

În concluzie, $C_{F,E} = \begin{pmatrix} -1/5 & -1 & -2/5 \\ -2/5 & -3 & -4/5 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Fie F şi G două baze ale spaţiului vectorial $\left(R^3, R\right)$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza F la baza G.

Ştiind că $F = \{ f_1 = (1,0,-1)^t, f_2 = (-2,0,1)^t, f_3 = (1,1,-1)^t \}$, să se determine baza G.

Rezolvare:

Conform definiţiei, prima coloană a matricei A reprezintă coordonatele vectorului g_1 în baza F:

$$(g_1)_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 0 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Analog avem:

$$(g_2)_F = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g_2 = (-2) \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$(g_3)_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 1 \cdot f_1 + 3 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că baza este:

$$G = \{g_1 = (4,2,-3)^t, g_2 = (-4,0,3)^t, g_3 = (-4,1,1)^t\}.$$

4. Fie următoarele sisteme de vectori din spațiul liniar (R^3, R):

$F = \{ f_1 = (-2,1,1)^t, f_2 = (3,-1,1)^t, f_3 = (1,1,-1)^t \}$,

$G = \{ g_1 = (2,1,0)^t, g_2 = (0,-1,1)^t, g_3 = (1,1,0)^t \}$.

a) Să se arate că F și G sunt baze ale spațiului liniar (R^3, R).

b) Să se determine matricea de trecere de la baza G la baza F și matricea de trecere de la baza F la baza G.

c) Fie x un vector din spațiul liniar (R^3, R). Știind că $x_F = (4,-2,1)^t$, să se determine x_G.

d) Să se exprime vectorul $y = -3g_1 + 2g_2 - g_3$ din spațiul liniar (R^3, R) în baza F și în baza canonică a spațiului (R^3, R).

e) Să se determine legătura între coordonatele unui vector din spațiul liniar (R^3, R) în bazele F și G.

Rezolvare:

a) Notăm cu A matricea care are drept coloane vectorii din mulțimea *F*.

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow rang A = 3 = \text{ numărul de}$$

vectori ai mulțimii *F*, prin urmare *F* formează un sistem de vectori liniar independent. (1)

Numărul vectorilor din F este 3 și este egal cu dimensiunea spațiului (R^3, R) (2)

Din (1) și (2) rezultă că *F* este o bază a spațiului liniar (R^3, R).

Analog se arată că *G* formează o bază a spațiului liniar (R^3, R).

b) Vom folosi observația 2. Fie A și *B* matricele asociate celor două baze (acestea au pe coloane vectorii bazelor *F*, respectiv *G*),

$C_{G,F}$ matricea de trecere de la baza G la baza F şi $x \in R^3$.

Avem că $x_G = C_{F,G}^{-1} \cdot x_F$ şi $x_G = B^{-1}A \cdot x_F$, prin urmare matricea de trecere de la baza G la baza F este: $C_{G,F} = B^{-1}A$, pe care o vom determina cu metoda Gauss-Jordan.

B			A		
2	0	1	-2	3	1
1	[-1]	1	1	-1	1
0	1	0	1	1	-1
2	0	1	-2	3	1
-1	1	-1	-1	1	-1
1	0	[1]	2	0	0
[1]	0	0	-4	3	1
0	1	0	1	1	-1
1	0	1	2	0	0
1	0	0	-4	3	1
0	1	0	1	1	-1
0	0	1	6	-3	-1
I_3			$B^{-1}A$		

Am obţinut că $C_{G,F} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Pentru a afla $C_{F,G}$ (matricea de trecere de la baza F la baza G), vom utiliza formula $C_{F,G} = (C_{G,F})^{-1}$.

c) Vom folosi formula de transformare a coordonatelor unui vector la trecerea din baza F în baza G:

$$x_G = C_{F,G}^{-1} \cdot x_F = C_{G,F} \cdot x_F = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

d) $y = -3f_1 + 2f_2 - f_3 \Rightarrow y_F = (-3,2,-1)^t$.

Pentru a exprima vectorul y în baza G vom folosi formula

$y_G = C_{F,G}^{-1} \cdot y_F$.

Pentru a exprima vectorul y în baza canonică *E*, vom folosi că

$$y = -3f_1 + 2f_2 - f_3 = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},$$ prin

urmare $y_E = (-1,-2,-4)^t$.

e) Considerăm un vector $x \in R^3$. Fie $x_G = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t$ şi

$x_F = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^t$ coordonatele vectorului x în cele două baze.

Aplicând formula $x_G = C_{F,G}^{-1} \cdot x_F = C_{G,F} \cdot x_F$, obținem că:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \beta_3 = 6\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 \end{cases}$$, relații

care arată legătura între coordonatele unui vector $x \in R^3$ în bazele G şi F.

5. Să se determine formulele de transformare a coordonatelor unui vector din spațiul liniar (R^2, R) la trecerea de la baza F la baza G, unde $F = \{f_1 = (1,-1)^t, f_2 = (-3,1)^t\}$ şi $G = \{g_1 = (2,1)^t, g_2 = (1,-1)^t\}$.

Rezolvare:

Considerăm un vector $x \in R^2$. Fie $x_F = (x_1, x_2)^t$ şi $x_G = (y_1, y_2)^t$ coordonatele vectorului x în cele două baze.

Notăm cu A matricea de trecere de la baza canonică la baza F (matricea având pe coloane vectorii bazei F) şi cu B matricea de trecere de la baza canonică la baza G. Formula de transformare a coordonatelor unui vector $x \in R^n$ la trecerea din baza F în baza G este: $x_G = B^{-1}A \cdot x_F$.

Calculăm matricea $B^{-1}A$ folosind metoda Gauss-Jordan.

B		A	
2	1	1	-3
1	[-1]	-1	1
[3]	0	0	-2
-1	1	1	-1
1	0	0	-2/3
0	1	1	-5/3
I_2		$B^{-1}A$	

Rezultă că $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2/3 \\ 1 & -5/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, prin urmare formulele de transformare a coordonatelor unui vector din spaţiul liniar (R^2, R) la trecerea de la baza F la baza G sunt: $\begin{cases} y_1 = -\frac{2}{3}x_2 \\ y_2 = x_1 - \frac{5}{3}x_2 \end{cases}$.

PROBLEME PROPUSE

1. În spaţiul liniar al polinoamelor de grad cel mult 3 şi coeficienţi reali $(R_3[X], R)$ considerăm bazele

$F = \{ f_1 = 1, f_2 = X, f_3 = X^2, f_4 = X^3 \}$ şi

$G=\{g_1=1-2X+X^2-4X^3, g_2=3X-X^2, g_3=2-X+8X^3,$
$g_4=3-2X+X^2\}$.

Să se determine matricea de trecere de la baza F la baza G.

R: $C_{F,G}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ şi $F=\{f_1,f_2,f_3\}$ două baze ale unui spaţiu vectorial de dimensiune 3. Ştiind că $f_1=-e_1-2e_2+3e_3$ $f_2=3e_1+2e_2-e_3$, $f_3=e_2+4e_3$, să se determine:

$a)$ matricea de trecere de la baza E la baza F;

$b)$ matricea de trecere de la baza F la baza E.

R: $a)$ $C_{E,F}=\big((f_1)_E\ \ (f_2)_E\ \ (f_3)_E\big)=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

$b)$ $C_{F,E}=(C_{E,F})^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{11}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

3. Fie F şi G două baze ale spaţiului vectorial $\left(R^3,R\right)$ şi

$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza F la baza G.

Ştiind că $F=\{f_1=(3,2,-1)^t, f_2=(1,0,-1)^t, f_3=(2,-1,1)^t\}$, să se determine baza G.

R: $G = \{g_1 = (12,7,-1)^t,\ g_2 = (4,-5,3)^t,\ g_3 = (8,3,-1)^t\}$.

4. Se consideră următoarele sisteme de vectori din spaţiul liniar (R^3, R):

$F = \{f_1 = (-3,2,1)^t,\ f_2 = (1,-3,1)^t,\ f_3 = (1,1,-1)^t\}$

$G = \{g_1 = (-1,2,0)^t, g_2 = (0,-1,2)^t, g_3 = (2,0,-1)^t\}$.

a) Să se arate că F şi G formează baze ale spaţiului liniar (R^3, R).

b) Să se determine matricea de trecere de la baza F la baza G şi matricea de trecere de la baza G la baza F.

c) Fie x un vector din spaţiul liniar (R^3, R). Ştiind că $x_G = (2,3,-4)^t$, să se determine x_F.

d) Să se exprime vectorul $y = 2f_1 - 3f_2 + f_3$ din spaţiul liniar (R^3, R) în baza G şi în baza canonică a spaţiului (R^3, R).

e) Să se determine formulele de transformare a coordonatelor unui vector din spaţiul liniar (R^3, R) la trecerea din baza G în baza F.

R: *b*) $C_{F,G} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$; $C_{G,F} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{9}{14} & -\frac{3}{14} \\ \frac{3}{7} & -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{8}{7} & \frac{1}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$;

c) $x_F = (11, 12, 12)^t$;

d) $y_G = (-\frac{19}{7}, \frac{11}{7}, -\frac{13}{7})^t$;

e) Fie $x_G = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t$ şi $x_F = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^t$; atunci

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \beta_2 = \frac{5}{2}\alpha_1 + 3\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3 \\ \beta_3 = \frac{3}{2}\alpha_1 + 5\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3 \end{cases}.$$

5. Stabiliți cum se modificã coordonatele unui vector la trecerea de la baza F la baza G, dacã:

$a)$ $F = \{ f_1 = (-1,2)^t, f_2 = (3,-1)^t \}, G = \{g_1 = (2,1)^t, g_2 = (1,2)^t\}$;

$b)$ $F = \{ f_1 = 2 - X + X^2, f_2 = 1 + 3X, f_3 = -1 + 2X^2\}$,
$G = \{g_1 = 1 + X, g_2 = -2 + 3X - X^2, g_3 = -1 + X^2\}$;

$c)$ $F = \{ f_1 = (-3,1,-1)^t, f_2 = (0,-1,1)^t, f_3 = (1,1,0)^t\}$,
$G = \{g_1 = (3,2,1)^t, g_2 = (2,1,0)^t, g_3 = (1,0,0)^t\}$.

R: a) Fie $x_F = (\alpha_1, \alpha_2)^t$ şi $x_G = (\beta_1, \beta_2)^t$; atunci

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{11}{15}\alpha_1 - \frac{8}{15}\alpha_2 \\ \beta_2 = -\frac{1}{5}\alpha_1 + \frac{3}{5}\alpha_2 \end{cases}.$$

6. Fie $B = \{b_1, b_2 = (1,2,1)^t, b_3 = (-2,1,1)^t\}$ o bazã a spațiului liniar $\left(R^3, R\right)$ şi vectorul $v = (-1,1,0)^t \in R^3$. Ştiind cã $v_B = (-1,1,2)^t$, sã se determine vectorul b_1.

R: $b = (-2, 3, 3)^t$.

7. Fie F şi G douã baze ale spațiului vectorial $\left(R_2[X], R\right)$ şi $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza F la baza

G . Ştiind cã $G=\{g_1=1+X, g_2=-2+3X-X^2, g_3=-1+X^2\}$, sã se determine baza F .

R: $C_{G,F}=(C_{F,G})^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$;

$f_1=-\frac{1}{3}g_1+\frac{2}{3}g_2-\frac{1}{3}g_3=-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}X-X^2$;

$f_2=\frac{2}{3}g_1-\frac{1}{3}g_2+\frac{2}{3}g_3=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}X+X^2$;

$f_3=\frac{7}{3}g_1-\frac{5}{3}g_2+\frac{4}{3}g_3=\frac{13}{3}-\frac{8}{3}X+3X^2$

CAPITOLUL 3
OPERATORI LINIARI

3.1. NOȚIUNEA DE OPERATOR LINIAR MATRICEA ASOCIATĂ UNUI OPERATOR LINIAR

BREVIAR TEORETIC

Fie (X,K) şi (Y,K) două spații vectoriale de dimensiune finită.

Definiția 1. O funcție $U : X \to Y$ se numeşte *operator liniar* dacă:

(1) U este *aditiv*, adică $U(x+y) = U(x) + U(y), \forall x, y \in X$;

(2) U este *omogen*, adică $U(\alpha x) = \alpha U(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in X$.

Observație. Cele două condiții pot fi înlocuite prin:

(3) $U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in X$.

Propoziție. Dacă $U : X \to Y$ este operator liniar, atunci $U(0_X) = 0_Y$. (4)

Definiția 2. Fie spațiile vectoriale (X,K) şi (Y,K) , cu $\dim X = m$, $\dim Y = n$, $m, n \in N$ şi $U : X \to Y$ un operator liniar. Fie $F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ o bază a lui (X,K) şi $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ o bază a lui (Y,K). Se numeşte *matricea operatorului liniar U corespunzătoare bazelor F şi G* matricea $A \in M_{m,n}(K)$ ale cărei linii sunt componentele vectorilor $U(f_1),...,U(f_m)$ în baza G, adică

$A = \left(U(f_1)_G \;\; U(f_2)_G \;\; ...... \;\; U(f_m)_G\right)^t$.

Reprezentarea operatorului liniar U în bazele F şi G este dată de formula: $U(x)_G = A^t x_F$.

Dacă F şi G sunt bazele canonice ale spaţiilor (X,K) şi (Y,K), atunci reprezentarea operatorului liniar U este: $U(x)=A^t x$.

Modificarea matricei unui operator liniar la schimbarea bazelor în care se reprezintă

Fie $U: X \to Y$ un operator liniar, F, F' două baze ale spaţiului liniar (X,K) şi G, G' două baze ale spaţiului liniar (Y,K).

Fie $A=A_{F,G}$ şi $B=A_{F',G'}$ matricele operatorului liniar corespunzătoare bazelor F şi G, respectiv bazelor F' *şi* G'. Fie C matricea de trecere de la baza F la baza F' şi D este matricea de trecere de la baza G la baza G'. Atunci $B^t = D^{-1}\cdot A^t \cdot C$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine care dintre următoarele aplicaţii defineşte un operator liniar:

$a)$ $U: R^3 \to R^2$, $U(x)=\begin{pmatrix} 4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$;

$b)$ $U: R^2 \to R^3$, $U(x)=\begin{pmatrix} x_1 - 4x_2 \\ -2x_1 + 3 \\ 5x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$a)$ Fie $\alpha,\beta \in R, x, y \in R^3$; avem că:

$$U(\alpha x+\beta y)=U\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta y_1 \\ \alpha x_2+\beta y_2 \\ \alpha x_3+\beta y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4(\alpha x_1+\beta y_1)-(\alpha x_2+\beta y_2)+3(\alpha x_3+\beta y_3) \\ -(\alpha x_1+\beta y_1)+2(\alpha x_2+\beta y_2)+(\alpha x_3+\beta y_3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\alpha x_1-\alpha x_2+3\alpha x_3\\-\alpha x_1+2\alpha x_2+\alpha x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\beta x_1-\beta x_2+3\beta x_3\\-\beta x_1+2\beta x_2+\beta x_3\end{pmatrix}=\alpha U(x)+\beta U(y);$$

b) *Metoda I.* Fie $\alpha,\beta\in R, x,y\in R^2$. Avem că: $U(\alpha x+\beta y)=$

$$=U\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\alpha x_2+\beta y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha x_1+\beta y_1)-4(\alpha x_2+\beta y_2)\\-2(\alpha x_1+\beta y_1)+3\\5(\alpha x_1+\beta y_1)-(\alpha x_2+\beta y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1-4\alpha x_2-4\beta y_2\\-2\alpha x_1-2\beta y_1+3\\5\alpha x_1+5\beta y_1-\alpha x_2-\beta y_2\end{pmatrix}\quad(1);$$

$$\alpha U(x)+\beta U(y)=\alpha\begin{pmatrix}x_1-4x_2\\-2x_1+3\\5x_1-x_2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y_1-4y_2\\-2y_1+3\\5y_1-y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1-4\alpha x_2-4\beta y_2\\-2\alpha x_1-2\beta y_1+3\alpha+3\beta\\5\alpha x_1+5\beta y_1-\alpha x_2-\beta y_2\end{pmatrix}\quad(2).$$

Din (1) şi (2) rezultă că relaţia (3) din definiţia operatorului liniar nu este îndeplinită $\forall\alpha,\beta\in R$, prin urmare U nu este operator liniar.

Metoda II. Dacă U ar fi operator liniar, conform (4) ar trebui ca $U(0_{R^2})=0_{R^3}$.

Dar $U(0_{R^2})=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\neq 0_{R^3}$, prin urmare U nu este operator liniar.

2. Se consideră operatorul liniar $U: R^3\to R^2$,
$U(x)=\begin{pmatrix}3x_1-x_2-2x_3\\-x_1+x_2+x_3\end{pmatrix}$. Să se determine:

a) matricea operatorului corespunzătoare bazelor canonice ale spaţiilor liniare (R^3, R) şi (R^2, R)**;**

b) matricea operatorului corespunzătoare bazelor
$F=\{f_1=(1,-1,2)^t, f_2=(3,0,1)^t, f_3=(1,2,-1)^t\}$ şi
$G=\{g_1=(-1,2)^t, g_2=(0,1)^t\}$.

Rezolvare:

a) Fie A matricea operatorului corespunzătoare bazelor canonice ale spațiilor R^3 şi R^2.

Scriem formula de reprezentare a operatorului în bazele canonice ale spațiilor spațiilor R^3 şi R^2: $U(x) = A^t x$.

În cazul nostru, avem că $U(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, de unde

rezultă că $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Fie $A_{F,G}$ matricea operatorului corespunzătoare bazelor F şi G. Determinarea acesteia se poate face în două moduri.

Metoda I. Folosind definiția 2.

$$U(f_1) = U\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Am obținut că $U(f_1)_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$U(f_2) = U\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 = 7 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -7 \\ \alpha_2 = 12 \end{cases}.$$

Rezultă că $U(f_2)_G = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$$U(f_3) = U\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = \alpha_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} -a_1 = 3 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -3 \\ \alpha_2 = 6 \end{cases}$, prin urmare $U(f_3)_G = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Rezultă că $A_{F,G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Metoda II. Folosind formula de transformare a matricei unui operator liniar la schimbarea bazelor în care se reprezintă, avem că: $A^t_{F,G} = D^{-1} \cdot A^t \cdot C$, unde C este matricea de trecere de la baza canonică a spațiului liniar (R^3, R) la baza F, iar D este matricea de trecere de la baza canonică a spațiului liniar (R^3, R) la baza G.

Avem că: $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, prin urmare

$A^t_{F,G} = D^{-1} \cdot A^t \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -3 \\ 0 & 12 & 6 \end{pmatrix}$ şi deci $A_{F,G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Se considerã operatorul liniar $U : R^2 \to R^3$,

$U(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$. Sã se determine matricea operatorului corespunzãtoare bazelor $G = \{g_1, g_2\}$ şi $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, unde

$$g_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ şi } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:
Avem:

$$U(g_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e_1 + 0e_2 - e_3, U(g_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 4e_1 - 5e_2 + 6e_3.$$

Rezultă că matricea operatorului corespunzătoare bazelor G şi E este: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Se considerã spațiile vectoriale (R^3, R) şi (R^2, R) şi fie $E = \{e_1, e_2, e_3\}, G = \{g_1, g_2\}$ bazele lor canonice. Notãm cu U operatorul liniar $U : R^3 \to R^2$, definit prin:

$U(e_1) = 3g_1 - g_2, U(e_2) = -2g_1 - g_2, U(e_3) = -5g_2$.

Sã se determine:

a) matricea asociatã operatorului liniar în bazele canonice;

b) forma operatorului;

c) matricea asociatã operatorului liniar în bazele
$F = \{-e_1 + 2e_2, e_2 - 3e_3, 4e_1 + e_3\}$ şi $G = \{g_1, g_2\}$;

d) matricea asociatã operatorului liniar în bazele
$F = \{-e_1 + 2e_2, e_2 - 3e_3, 4e_1 + e_3\}$ şi $H = \{3g_1 - g_2, -g_1 + 2g_2\}$.

Rezolvare:

a) Vom folosi definiția. Din ipotezã rezultã că

$U(e_1)_G = (3,-1)^t$, $U(e_2)_G = (-2,-1)^t$, $U(e_3)_G = (0,-5)^t$. Prin urmare, matricea asociatã operatorului liniar în bazele canonice este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

b) Folosind rezultatul obținut la punctul precedent, obținem cã:

$$U(x) = A^t x = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -x_1 - x_2 - 5x_3 \end{pmatrix}.$$

c) Notãm cu B matricea asociatã operatorului liniar în bazele F şi G. Avem:

$U(f_1) = U(-e_1 + 2e_2) = -U(e_1) + 2U(e_2) = -(3g_1 - g_2) +$
$+ 2(-2g_1 - g_2) = -7g_1 - 3g_2$ şi analog
$U(f_2) = -2g_1 + 14g_2, U(f_3) = 12g_1 - 9g_2$.

De aici rezultã cã

$U(f_1)_G = (-7,-3)^t$, $U(f_2)_G = (-2,14)^t$, $U(f_3)_G = (12,-9)^t$. Prin urmare, matricea asociatã operatorului liniar în bazele F şi G este:

$$B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & 14 \\ 12 & -9 \end{pmatrix}.$$

d) Fie C matricea asociatã operatorului liniar în bazele F şi H.

$U(f_1) = -7g_1 - 3g_2, U(f_2) = -2g_1 + 14g_2, U(f_3) = 12g_1 - 9g_2$.

Trebuie sã determinãm coordonatele vectorilor $U(f_1)$, $U(f_2)$, $U(f_3)$ în baza H. Pentru aceasta, vom aplica metoda eliminãrii complete.

Baza	h_1	h_2	$U(f_1)$	$U(f_2)$	$U(f_3)$
g_1 g_2	3 -1	[-1] 2	-7 -3	-2 14	12 -9
h_2 g_2	-3 [5]	1 0	7 -17	2 10	-12 15
h_2 h_1	0 1	1 0	$-\frac{16}{5}$ $-\frac{17}{5}$	8 2	-3 3

Prin urmare,
$U(f_1)_H = (-\frac{17}{5},-\frac{16}{5})^t, U(f_2)_H = (2,8)^t, U(f_3)_H = (3,-3)^t$, de unde

rezultã matricea $C = \begin{pmatrix} -\frac{17}{5} & -\frac{16}{5} \\ 2 & 8 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Considerãm spaţiul vectorial (R^3, R) şi fie $E = \{e_1, e_2\}$ baza canonicã a acestui spaţiu. Notãm cu U operatorul liniar $U : R^2 \to R^3$, definit prin: $U(e_1) = (-1,2,-3)^t, U(e_2) = (2,-3,4)^t$.
Sã se determine:

a) matricea asociatã operatorului liniar în bazele canonice;

b) forma operatorului.

Rezolvare:

a) Dacã notãm cu $G = \{g_1, g_2, g_3\}$baza canonicã a spaţiului (R^3, R), atunci rezultã cã $U(e_1)_G = (-1,2,-3)^t, U(e_2)_G = (2,-3,4)^t$, de unde obţinem matricea operatorului în bazele canonice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$b)$ Folosind rezultatul de la punctul precedent, obținem cã:

$$U(x) = A^t x = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ -3x \ + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

6. Considerãm spațiul vectorial (R^3, R) și fie $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonicã a acestui spațiu. Notãm cu U operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$, definit prin: $U(e_1) = 2e_2 - 3e_3, U(e_2) = -e_1 - 3e_2$ $U(e_3) = 2e_1$. Sã se determine:

$a)$ matricea asociatã operatorului liniar în bazele canonice;

$b)$ forma operatorului.

Rezolvare:

$a)$ Vom folosi definiția. Din ipotezã rezultã cã $U(e_1)_E = (0,2,-3)^t, U(e_2)_E = (-1,-3,0)^t, U(e_3)_E = (2,0,0,)^t$. Prin urmare, matricea asociatã operatorului liniar în bazele canonice este:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$b)$ Utilizând rezultatul obținut la punctul precedent, obținem cã:

$$U(x) = A^t x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 \end{pmatrix}.$$

7. Se considerã operatorii liniari $U, V : R^2 \to R^2$,

$$U(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}, V(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}.$$ Sã se determine:

$a)$ operatorii $U + V, U \circ V$;

$b)$ matricele operatorilor calculați la punctul $a)$, corespunzãtoare bazei canonice a spațiului $\left(R^2, R\right)$.

Rezolvare:

$a)$ $(U+V)(x) = U(x) + V(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$.

$$(U \circ V)(x) = U(V(x)) = U\begin{pmatrix} -x_1 + 4x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2(-x_1 + 4x_2) - (3x_1 - 5x_2) \\ -(-x_1 + 4x_2) + 3(3x_1 - 5x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 3x_2 \\ 10x_1 - 19x_2 \end{pmatrix}.$$

$b)$ *Metoda I.* Folosind rezultatul obținut la punctul $a)$, rezultã:

$$A_{U+V} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ şi } A_{U \circ V} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -19 \end{pmatrix}.$$

Metoda II. Fãrã a calcula $U+V$ şi $U \circ V$, utilizând formulele $A_{U+V} = A_U + A_V$ şi $A_{U \circ V} = A_U \cdot A_V$, obținem:

$$A_{U+V} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_{U \circ V} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & -19 \end{pmatrix}.$$

PROBLEME PROPUSE

1. Sã se determine care din urmãtoarele aplicații defineşte un operator liniar:

$a)$ $U: R^3 \to R^2$, $U(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$;

$b)$ $U: R^2 \to R^3$, $U(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 - 4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$.

$c)$ $U: R^2 \to R^2$, $U(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 5x_2 \\ 3x_1 + 6x_2 \end{pmatrix}$.

R: Aplicația de la punctul $c)$ defineşte un operator liniar.

2. Se consideră operatorul liniar $U: R^2 \to R^3$,
$U(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$. Să se determine:

$a)$ matricea operatorului corespunzătoare bazelor canonice ale spațiilor R^2 şi R^3**;**

$b)$ matricea operatorului corespunzătoare bazelor

$F = \{f_1 = (-1,2)^t, f_2 = (-2,1)^t\}$ şi

$G = \{g_1 = (-1,0,2)^t, g_2 = (2,0,1)^t, g_3 = (1,1,0)\}$.

R: $a)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $b)$ $A_{F,G} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} & -\frac{13}{5} & 5 \\ \frac{11}{5} & -\frac{17}{5} & 4 \end{pmatrix}$.

3. Se consideră operatorul liniar $U: R^3 \to R^2$,
$U(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea operatorului corespunzătoare bazelor $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ şi $E = \{e_1, e_2\}$, unde

$$g_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\ g_2=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\ g_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \text{iar}\ e_1=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

R: $A_{G,E}=\begin{pmatrix}0 & 7\\ \frac{5}{2} & \frac{17}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

4. Se consideră spațiile vectoriale (R^3,R) şi (R^2,R) şi fie $E=\{e_1,e_2,e_3\},G=\{g_1,g_2\}$ bazele lor canonice. Notăm cu U operatorul liniar $U:R^3\to R^2$, definit prin:
$U(e_1)=-g_1+2g_2,U(e_2)=2g_1-3g_2,U(e_3)=2g_1$.
Să se determine:
$a)$ matricea asociată operatorului liniar în bazele canonice;
$b)$ forma operatorului;
$c)$ matricea asociată operatorului liniar în bazele
$F=\{2e_1+3e_2,3e_1-2e_3,e_1+e_2\}$ şi $G=\{g_1,g_2\}$;
$d)$ matricea asociată operatorului liniar în bazele
$F=\{e_1-3e_2,2e_2+3e_3,e_1-2e_3\}$ şi $H=\{g_1-2g_2,-2g_1+g_2\}$.

5. Fie spațiul vectorial (R^3,R) şi fie $E=\{e_1,e_2,e_3\}$ baza canonică a acestui spațiu. Notăm cu U operatorul liniar $U:R^3\to R^3$, definit prin: $U(e_1)=-3e_1+e_2,U(e_2)=-e_1+2e_2$, $U(e_3)=e_1$. Să se determine:
a) matricea asociată operatorului liniar în bazele canonice;
b) forma operatorului.

6. Se consideră operatorii liniari $U, V : R^3 \to R^3$,

$$U(x) = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \; V(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 3x_2 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$ Să se

determine:

$a)$ operatorii $U + V, U \circ V$;

$b)$ matricele operatorilor calculați la punctul $a)$, corespunzătoare bazei canonice a spațiului (R^3, R).

R:

$a)$ $$(U+V)(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 - 5x_3 \\ -6x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}; (U \circ V)(x) = \begin{pmatrix} -12x_1 + 11x_2 - 7x_3 \\ 16x_1 - 16x_2 + 11x_3 \\ -5x_1 + 16x_2 - 10x_3 \end{pmatrix};$$

$b)$ $$A_{U+V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & -5 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \; A_{U \circ V} = \begin{pmatrix} -12 & 11 & -7 \\ 16 & -16 & 11 \\ -5 & 16 & -10 \end{pmatrix}.$$

3.2. NUCLEUL ŞI IMAGINEA UNUI OPERATOR LINIAR INJECTIVITATEA, SURJECTIVITATEA ŞI INVERSABILITATEA UNUI OPERATOR LINIAR

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Fie (X,K) şi (Y,K) două spații vectoriale de dimensiune finită şi $U:X\to Y$ un operator liniar. Se numeşte *nucleul operatorului* U şi se notează $KerU$ mulțimea:
$KerU=\{x\in X/U(x)=0_Y\}$.

Definiția 2. Fie (X,K) şi (Y,K) două spații vectoriale de dimensiune finită şi $U:X\to Y$ un operator liniar. Se numeşte *imaginea operatorului* U şi se notează ImU mulțimea:
$ImU=\{y\in Y/\exists x\in X\ a.i.U(x)=y\}$.

Definiția 3. Fie (X,K) şi (Y,K) două spații vectoriale de dimensiune finită şi $U:X\to Y$ un operator liniar. Operatorul U se numeşte *injectiv*, respectiv *surjectiv*, dacă acesta este o funcție injectivă, respectiv surjectivă.

Propoziția 1. Fie (X,K) şi (Y,K) două spații vectoriale de dimensiune finită şi $U:X\to Y$ un operator liniar. Operatorul U este injectiv dacă şi numai dacă $KerU=\{0_X\}$.

Propoziția 2. Fie (X,K) şi (Y,K) două spații vectoriale de dimensiune finită şi $U:X\to Y$ un operator liniar. Operatorul U este surjectiv dacă şi numai dacă $ImU=Y$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră operatorul liniar $U : R^3 \to R^4$, $U(x) = (2x_1, 0, x_2 - x_3, -x_1)^t$. Să se determine nucleul şi imaginea operatorului, precum şi dimensiunile acestora.

Rezolvare:

Nucleul operatorului este: $KerU = \{x \in R^3 / U(x) = 0\}$.
Rezolvăm ecuația $U(x) = 0$ şi obținem sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 = a, a \in R \end{cases} \Rightarrow KerU = \{(0, a, a)^t / a \in R\}.$$

$x \in KerU \Rightarrow x = (0, a, a)^t = a(0,1,1)^t$.

Fie $g_1 = (0,1,1)^t$; $\{g_1\}$ este sistem de generatori pentru spațiul $KerU$ şi sistem de vectori liniar independent, deci formează o bază a acestui spațiu, prin urmare $dim\, KerU = 1$.

Imaginea operatorului este $Im\, U = \{y \in R^4 / \exists x \in R^3 a.i. U(x) = y\}$.

$Im\, U = \{(2x_1, 0, x_2 - x_3, -x_1)^t / x_1, x_2 - x_3 \in R\} =$

$= \{x_1(2,0,0,-1)^t + (x_2 - x_3)(0,0,1,0)^t / x_1, x_2 - x_3 \in R\}$

$= \{a(2,0,0,-1)^t + b(0,0,1,0)^t / a, b \in R\}$.

Fie $g_1 = (2,0,0,-1)^t$ şi $g_2 = (0,0,1,0)^t$; $\{g_1, g_2\}$ este sistem de vectori liniar independent şi sistem de generatori pentru spațiul $Im\, U$, deci formează o bază a acestui spațiu; rezultă $dim Im\, U = 2$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ matricea asociată unui operator liniar

$U : R^3 \to R^3$. Sã se determine $KerU$, ImU, $dim\,KerU$, $dimImU$.

Rezolvare:

$KerU = \{x \in R^3 / U(x) = 0\}$;

$U(x) = 0 \Rightarrow A^t x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$; deteminantul matricei

sistemului: $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$; alegem minorul principal

$d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$ şi rezultã soluția sistemului: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{11}\alpha \\ x_2 = \dfrac{9}{11}\alpha, \ \alpha \in R, \\ x_3 = \alpha \end{cases}$

deci $KerU = \left\{ \left(\dfrac{5}{11}a, \ \dfrac{9}{11}a, \ a \right)^t / \, a \in R \right\}$.

Dacă $x \in KerU$, atunci

$x = \left(\dfrac{5}{11}a, \ \dfrac{9}{11}a, \ a \right)^t = a\left(\dfrac{5}{11}, \ \dfrac{9}{11}, \ 1 \right)^t, \ a \in R$.

Fie $g_1 = \left(\dfrac{5}{11}, \dfrac{9}{11}, 1 \right)^t$; $\{g_1\}$ este sistem de generatori pentru spațiul $KerU$ şi sistem de vectori liniar independent, deci formează o bazã a acestui spațiu; prin urmare, $dim\,KerU = 1$.

ImU= $\left\{y \in R^3 / \exists x \in R^3 a.i. U(x) = y\right\}$;

$$U(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = y_1 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 = y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = y_3 \end{cases}$$; trebuie determinat $y \in R^3$

astfel încât sistemul sã fie compatibil.
Considerând minorul principal al matricei sistemului:

$d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \neq 0$, rezultă că $rangA = 2$;

$$d_{car} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & y_1 \\ 5 & -4 & y_2 \\ 3 & 2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 22y_1 + 11y_2 - 11y_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y_1 + y_2 - y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 2y_1 + y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \alpha \\ y_2 = \beta \\ y_3 = 2\alpha + \beta \end{cases} ;\alpha, \beta \in R.$$

ImU= $\left\{(\alpha, \beta, 2\alpha + \beta)^t / \alpha, \beta \in R\right\} = \left\{\alpha(1,0,2)^t + \beta(0,1,1)^t / \alpha, \beta \in R\right\}$.

Fie $g_1 = (1,0,2)^t$ şi $g_2 = (0,1,1)^t$; $\{g_1, g_2\}$ este sistem de vectori liniar independent şi sistem de generatori pentru spaţiul ImU, deci formează o bază a acestui spaţiu; rezultă $dimImU = 2$.

3. Se consideră operatorul liniar $U : R^3 \rightarrow R^3$,
$U(x) = (-x_1 + 2x_2, 3x_1 + x_3, x_2 - x_3)^t$.
Să se studieze:

$a)$ injectivitatea, surjectivitatea operatorului liniar U;

$b)$ inversabilitatea operatorului şi dacă este inversabil să se calculeze inversa acestuia.

Rezolvare:

$a)$ U este injectiv dacă şi numai dacă $KerU = \{0\}$.

$$U(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ 6x_2 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

$KerU = \{0\}$, prin urmare operatorul U este injectiv.

U este surjectiv dacă şi numai dacă $ImU = R^3$;
$ImU = \{y \in R^3 / \exists x \in R^3 a.i. U(x) = y\}$.

$$U(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 3x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 - x_3 = y_3 \end{cases}$$; $\exists x \in R^3$ astfel încât $U(x) = y$ dacă şi numai dacă sistemul este compatibil; deteminantul matricei sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists x \in R^3 : U(x) = y, \forall y \in R^3 \Rightarrow ImU = R^3 \Rightarrow$$

U este surjectiv.

$b)$ Deoarece U este injectiv şi surjectiv, rezultă că U este bijectiv, deci inversabil. Determinăm U^{-1}:

$$U(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 3x_1 + x_3 = y_2 \\ x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-y_1 + 2y_2 + 2y_3}{7} \\ x_2 = \frac{3y_1 + y_2 + y_3}{7} \\ x_3 = \frac{3y_1 + y_2 - 6y_3}{7} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U^{-1}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{2}{7}x_3 \\ \frac{3}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 \\ \frac{3}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 - \frac{6}{7}x_3 \end{pmatrix}.$$

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$. Să se determine $KerU$, ImU, $dimKerU$, $dimImU$ dacă:

$a)$ $U(x) = (x_1,\ x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)^t$;

$b)$ $U(x) = (x_2, x_1, x_3)^t$;

$c)$ $U(x) = (2x_1 - x_2 + x_3,\ 0,\ x_1 + x_2 - 2x_3)^t$.

R: $a)$ $KerU = \{(0, -\alpha, \alpha)^t / \alpha \in R\}$; $\dim KerU = 1$;

$ImU = \{(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta)^t / \alpha,\ \beta \in R\}$; $dimImU = 2$;

$b)$ $KerU = \{0\}$; $\dim KerU = 0$;

$ImU = R^3$; $dimImU = 3$;

$c)$ $KerU = \left\{\left(\frac{1}{3}\alpha,\ \frac{5}{3}\alpha,\ \alpha\right)^t / \alpha \in R\right\}$; $\dim KerU = 1$;

$ImU = \{(\alpha,\ 0,\ \beta)^t / \alpha,\ \beta \in R\}$; $dimImU = 2$.

2. Se consideră operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$. În fiecare din cazurile $a)$, $b)$, $c)$, se cere:

1) să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea operatorului U.

2) să se studieze dacă operatorul este inversabil şi în caz afirmativ să se calculeze inversa acestuia:

$a)$ $U(x) = (3x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 - 2x_2 + 2x_3, x_1 + x_3)^t$;

$b)$ $U(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + 2x_3, -x_1 - 2x_2)^t$;

$c)$ $U(x) = (2x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 3x_2 + 2x_3, -x_1 + x_2)^t$.

R: $a)$ nu este injectiv, nu este surjectiv;

$b)$ este bijectiv; $U^{-1}(x)=\begin{pmatrix} 4x_1-2x_2+x_3 \\ -2x_1+x_2-x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}$;

$c)$ este bijectiv; $U^{-1}(x)=\begin{pmatrix} -x_1+x_2-4x_3 \\ -x_1+x_2-3x_3 \\ x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{5}{2}x_3 \end{pmatrix}$.

3.3. VECTORI PROPRII ŞI VALORI PROPRII

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Fie (X, K) un spațiu vectorial şi $U : X \to X$ un operator liniar cu reprezentarea $U(x) = A^t x$.

Vectorul $x \in X$, $x \neq 0$, se numeşte *vector propriu* al operatorului U dacă există $\lambda \in K$ astfel încât $U(x) = \lambda x$; în acest caz, λ se numeşte *valoare proprie* a operatorului U şi se spune că x este *vector propriu corespunzător valorii proprii* λ.

Definiția 2. Fie (X, K) un spațiu vectorial, $U : X \to X$ un operator liniar şi λ o valoare proprie a operatorului U. Mulțimea $X_\lambda = \{x \in X / U(x) = \lambda x\}$ se numeşte *subspațiul propriu* asociat valorii proprii λ.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se considerã operatorul liniar: $U : R^3 \to R^3$,

$U(x) = (x_1 + 3x_2 - 4x_3, -2x_2 + 5x_3, 3x_3)^t$.

Să se determine valorile proprii, vectorii proprii şi subspațiile proprii corespunzătoare pentru acest operator.

Rezolvare:

Din relația $U(x) = A^t x$ vom determina matricea operatorului în baza canonică a spațiului (R^3, R):

$$U(x)=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^t x \Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 0\\ -4 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

- Determinăm valorile proprii ale operatorului, rezolvând ecuația caracteristică:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 3 & -2-\lambda & 0\\ -4 & 5 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1;\quad \lambda_2=-2;\quad \lambda_3=3.$$

- Determinăm vectorii proprii corespunzători fiecărei valori proprii, rezolvând ecuația matriceală $A^t \cdot x=\lambda \cdot x$, cu $x \neq 0$.

Pentru $\lambda_1=1$ obținem

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3=x_1\\ -2x_2+5x_3=x_2\\ 3x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3=0,\ x_2=0,\ x_1=a,\ a\in R\setminus\{0\}.$$

Prin urmare, mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1=1$ este: $V_1=\{(a,0,0)^t / a\in R\setminus\{0\}\}$.

Subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1=1$ este:

$X_1=\{(a,0,0)^t / a\in R\}$.

Pentru $\lambda_1=-2$ obținem

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -4\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+3x_2-4x_3=-2x_1\\ -2x_2+5x_3=-2x_2\\ 3x_3=-2x_3\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x_3 = 0,\ x_2 = a,\ x_1 = -a,\ \ a \in R \setminus \{0\}$. Deci mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -2$ este:

$V_{-2} = \left\{(-a, a, 0)^t \ / \ a \in R \setminus \{0\}\right\}$.

Subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -2$ este:

$X_{-2} = \left\{(-a, a, 0)^t \ / \ a \in R\right\}$.

Pentru $\lambda_1 = 3$ obținem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3x_1 \\ -2x_2 + 5x_3 = 3x_2 \Rightarrow \\ 3x_3 = 3x_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_3 = a,\ x_2 = a,\ x_1 = -\frac{a}{2},\ \ a \in R \setminus \{0\}$. Prin urmare, mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 3$ este:

$V_3 = \left\{\left(a, a, -\frac{a}{2}\right)^t \ / \ a \in R \setminus \{0\}\right\}$.

Subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = 3$ este:

$X_3 = \left\{\left(a, a, -\frac{a}{2}\right)^t \ / \ a \in R\right\}$.

2. Fie $U : R^3 \to R^3$ un operator liniar care are matricea corespunzătoare bazelor canonice $A = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 6 \\ -24 & -19 & -12 \\ 12 & 10 & 7 \end{pmatrix}$.

Să se determine valorile proprii, vectorii proprii şi subspațiile proprii corespunzătoare pentru acest operator.

Rezolvare:

- Determinăm valorile proprii ale operatorului, rezolvând ecuația caracteristică:

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 13-\lambda & 10 & 6 \\ -24 & -19-\lambda & -12 \\ 12 & 10 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Adunând toate liniile la prima, obținem:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda \\ -24 & -19-\lambda & -12 \\ 12 & 10 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -24 & -19-\lambda & -12 \\ 12 & 10 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1;\ \ \lambda_3=-1.$$

- Determinăm vectorii proprii corespunzători fiecărei valori proprii, rezolvând ecuația matriceală $A^t \cdot x=\lambda \cdot x$, cu $x \neq 0$.

Pentru $\lambda_1=1$ obținem

$$\begin{pmatrix} 13 & -24 & 12 \\ 10 & -19 & 10 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 13x_1-24x_2+12x_3=x_1 \\ 10x_1-19x_2+10x_3=x_2 \\ 6x_1-12x_2+\ \ 7x_3=x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12x_1-24x_2+12x_3=0 \\ 10x_1-20x_2+10x_3=0 \\ 6x_1-12x_2+\ \ 6x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=2b-a;\ \ a,b\in R,\ a^2+b^2\neq 0.$$

Rezultă că mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1=1$ este: $V_1=\left\{(a,b,2b-a)^t \,/\, a,b\in R, a^2+b^2\neq 0\right\}$.

Subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1=1$ este:

$X_1=\left\{(a,b,2b-a)^t \,/\, a,b\in R\right\}$.

Pentru $\lambda_1 = -1$ obținem

$$\begin{pmatrix} 13 & -24 & 12 \\ 10 & -19 & 10 \\ 6 & -12 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 13x_1 - 24x_2 + 12x_3 = -x_1 \\ 10x_1 - 19x_2 + 10x_3 = -x_2 \\ 6x_1 - 12x_2 + \ \ 7x_3 = -x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 14x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0 \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0 \\ 6x_1 - 12x_2 + \ \ 8x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0 \\ 5x_1 \ \ - 9x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 \ \ - 6x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_1 = 2a,\ x_2 = \frac{5}{3}a,\ x_3 = a;\ \ a \in R \setminus \{0\}$. Prin urmare, mulțimea vectorilor proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este:

$V_{-1} = \left\{ \left(2a, \frac{5}{3}a, a\right)^t / a \in R \setminus \{0\} \right\}$. Subspațiul propriu corespunzător

valorii proprii $\lambda_2 = -1$ este: $X_{-1} = \left\{ \left(2a, \frac{5}{3}a, a\right)^t / a \in R \right\}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$, unde:

$a)$ $U(x) = (x_2, x_2 + 2x_3, -x_3)^t$;

$b)$ $U(x) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2)^t$;

$c)$ $U(x) = (-x_3, -x_2, -x_1)^t$.

R: $a)$ $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$;

$V_{-1} = \{(a, -a, a)^t / a \in R \setminus \{0\}\};\ \ V_0 = \{(a, 0, 0)^t / a \in R \setminus \{0\}\};$

$V_1 = \{(a, a, 0)^t / a \in R \setminus \{0\}\};$

$b)\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3;\ V_0 = \left\{(-a,\ -a,\ a)^t \ /\ a \in R \setminus \{0\}\right\};$
$V_1 = \left\{(a,\ a,\ 0)^t \ /\ a \in R \setminus \{0\}\right\};\ V_3 = \left\{(-a,\ 2a,\ a)^t \ /\ a \in R \setminus \{0\}\right\};$
$c)\ \lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1;\ V_{-1} = \left\{(a,\ b,\ a)^t \ /\ a, b \in R,\ a^2 + b^2 \neq 0\right\};$
$V_1 = \left\{(-a, 0,\ a)^t \ /\ a \in R \setminus \{0\}\right\}.$

2. Să se calculeze valorile proprii şi subspaţiile proprii pentru operatorul liniar $U : R^3 \to R^3$ care are ca matrice corespunzătoare bazelor canonice matricea:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix};\quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$c)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

R: $a)\ \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 8;\ X_{-2} = \left\{\left(-\frac{10}{9}a,\ \frac{40}{9}a,\ a\right)^t \ /\ a \in R\right\};$

$X_{-1} = \left\{\left(0,\ \frac{9}{2}a,\ a\right)^t \ /\ a \in R\right\};\ X_8 = \left\{(0,\ 0,\ a)^t \ /\ a \in R\right\};$

$b)\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2;$
$X_1 = \left\{(0,\ a,\ a)^t \ /\ a \in R\right\}; X_2 = \left\{(a,\ a,\ 2a)^t \ /\ a \in R\right\};$

$c)\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2;\ X_0 = \left\{(-a,\ 0,\ a)^t \ /\ a \in R\right\};$
$X_1 = \left\{(a,\ a,\ a)^t \ /\ a \in R\right\};\ X_2 = \left\{(a,\ 2a,\ a)^t \ /\ a \in R\right\}.$

CAPITOLUL 4

FUNCȚIONALE LINIARE, BILINIARE ŞI PĂTRATICE

4.1. FUNCȚIONALE LINIARE

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Fie (X, K) un spațiu vectorial de dimensiune finită. O aplicație $f : X \to K$ se numeşte *funcțională liniară* dacă:

(1) f este *aditivă*, adică
$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in X$;

(2) f este *omogenă*, adică
$f(\alpha x) = \alpha f(x), \forall \alpha \in K, \forall x \in X$.

Observație. Cele două condiții pot fi înlocuite prin:

(3) $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \forall \alpha, \beta \in K, \forall x, y \in X$.

Definiția 2. Fie (X, K) un spațiu vectorial de dimensiune n, $f : X \to K$ o funcțională liniară, $G = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ o bază a spațiului liniar (X, K).

Notăm $a_i = f(g_i),\ i = \overline{1,n}$. Atunci $A = (a_1, a_2, ... a_n)^t$ se numeşte *vectorul ataşat funcționalei liniare în baza* G.

PROBLEME REZOLVATE

1. Stabiliți dacă următoarele aplicații sunt funcționale liniare şi în caz afirmativ scrieți vectorul ataşat funcționalei în baza canonică a spațiului liniar $\left(R^3, R\right)$ şi în baza
$G=\left\{g_1=(3,3,1)^t, g_2=(3,1,3)^t, g_3=(1,3,3)^t\right\}$.

$a)$ $f: R^3 \rightarrow R, f(x)=3x_1-x_2+2x_3$;

$b)$ $f: R^3 \rightarrow R, f(x)=x_1-2x_2+4x_3+1$.

Rezolvare:

$a)$ f este funcțională liniară dacă $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$, $\forall x, y \in R^3$ şi $\forall \alpha, \beta \in R$.

Fie $x, y \in R^3, \alpha, \beta \in R \Rightarrow x=\left(x_1, x_2, x_3\right)^t, y=\left(y_1, y_2, y_3\right)^t$;

$f(\alpha x+\beta y)=f\left(\alpha\left(x_1, x_2, x_3\right)^t+\beta\left(y_1, y_2, y_3\right)^t\right)=$
$=f\left(\left(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3\right)^t\right)=3\left(\alpha x_1+\beta y_1\right)-$
$-\left(\alpha x_2+\beta y_2\right)+2\left(\alpha x_3+\beta y_3\right)=\alpha\left(3x_1-x_2+2x_3\right)+$
$+\beta\left(3y_1-y_2+2y_3\right)=\alpha f(x)+\beta f(y)$, prin urmare f este funcțională liniară.

Vectorul ataşat funcționalei f în baza canonică a spațiului (R^3, R) este format din coeficienții funcționalei : $A=(3,-1,2)^t$.

Vectorul ataşat funcționalei f în $G=\left\{g_1, g_2, g_3\right\}$ este $B=\left(f(g_1), f(g_2), f(g_3)\right)^t$. Avem că:

$f(g_1)=f(3,3,1)=8;\ f(g_2)=f(3,1,3)=14;\ f(g_3)=f(1,3,3)=6$, prin urmare $B=(8,\quad 14,\quad 6)^t$.

$b)$ Fie $x, y \in R^3$ şi $\alpha, \beta \in R$. Avem că:

$f(\alpha x+\beta y)=f(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3)=$
$=(\alpha x_1+\beta y_1)-2(\alpha x_2+\beta y_2)+4(\alpha x_3+\beta y_3)+1$ şi
$\alpha f(x)+\beta f(y)=\alpha x_1-2\alpha x_2+4\alpha x_3+\beta y_1-2\beta y_2+4\beta y_3+\alpha+\beta$,
prin urmare $f(\alpha x+\beta y)\neq\alpha f(x)+\beta f(y)$.
Rezultă că f nu este funcţională liniară.

2. Arătaţi că aplicaţia $f: R_2[X]\to R,\quad f(P)=\int_0^1 P(x)dx$ este o funcţională liniară şi scrieţi vectorul ataşat funcţionalei în baza canonică a spaţiului liniar $\left(R_2[X],R\right)$ şi în baza
$G=\left\{g_1=1-X, g_2=3X+X^2, g_3=2+3X^2\right\}$.

Rezolvare:
f este funcţională liniară dacă $f(\alpha P+\beta Q)=\alpha f(P)+\beta f(Q)$, $\forall\alpha,\beta\in R,\forall P,Q\in R_2[X]$, Avem că:
$f(\alpha P+\beta Q)=\int_0^1(\alpha P+\beta Q)(x)dx=\alpha\int_0^1 P(x)dx+\beta\int_0^1 Q(x)dx=$
$=\alpha f(P)+\beta f(Q)$, prin urmare f este funcţională liniară.
Baza canonică a spaţiului liniar $\left(R_2[X],R\right)$ este
$E=\left\{e_1=1, e_2=X, e_3=X^2\right\}$.
Vectorul ataşat funcţionalei în baza E, notat A, este:
$A=\left(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\right)^t$
Avem că $f(e_1)=\int_0^1 dx=x\Big|_0^1=1$; $f(e_2)=\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$;
$f(e_2)=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$; prin urmare, vectorul ataşat funcţionalei

în baza canonică este $A=\left(1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}\right)^t$.

Analog se obține că vectorul atașat funcționalei f în baza G este: $B=\left(f(g_1), f(g_2), f(g_3)\right)^t$ şi va rezulta: $B=\left(\frac{1}{2}, \ \frac{11}{6}, \ 3\right)^t$.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se stabilească dacă următoarele aplicații sunt funcționale liniare şi în caz afirmativ să se scrie vectorul atașat funcționalei în baza canonică şi în baza G a spațiului liniar (V, K):

$a)$ $f: R^3 \to R,\ f(x)=3x_1-x_2+2x_3$;

$G=\left\{g_1=(1,1,1)^t, g_2=(0,1,3)^t, g_3=(1,3,0)^t\right\},\ (V,K)=\left(R^3,R\right)$;

$b)$ $f: R^3 \to R,\ f(x)=x_1-2x_2+4x_3+2$;

$G=\left\{g_1=(2,1,1)^t, g_2=(0,1,2)^t, g_3=(12,0)^t\right\}, (V,K)=\left(R^3,R\right)$;

$c)$ $f: R^4 \to R,\ f(x)=3x_1-x_2+2x_3+3x_4$;

$G=\left\{g_1=(1,1,1,1)^t, g_2=(1,2,3,4)^t, g_3=(1,4,9,16)^t, g_4=(1,8,27,64)^t\right\}$, $(V,K)=\left(R^4,R\right)$;

$d)$ $f: R^2 \to R,\ f(x)=x_1-2x_2+1$;

$G=\left\{g_1=(2,1)^t, g_2=(1,2)^t\right\}$. $(V,K)=\left(R^2,R\right)$.

R: $a)$ f este funcțională liniară; matricea funcționalei în baza canonică este $A=(3, \ -1, \ 2)^t$; matricea funcționalei în baza G este $B=(4, \ 5, \ 0)^t$.

2. Să se arate că aplicația $f: R_n\ [X] \to R,\quad f(P) = P(2)$ este o funcțională liniară şi să se scrie vectorul ataşat funcționalei în baza

$$G = \left\{ g_1 = 1,\ g_2 = X - 1,\ g_3 = \frac{(X-1)^2}{2!}, \ldots\ldots, g_n = \frac{(X-1)^n}{n!} \right\}.$$

R: Vectorul ataşat funcționalei în baza G este

$$A = \left(1,\ 1,\ \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots\ldots, \frac{1}{n!}\right)^t$$

3. Să se determine funcționala liniară $f: R^3 \to R$, ştiind că $f(1,0,2) = 3$, $f(2,1,0) = 6$, $f(0,2,1) = 9$.

R: Se caută f de forma $f(x) = ax_1 + bx_2 + cx_3$, unde $a, b, c \in R$ şi se găseşte $f(x) = x_1 + 4x_2 + x_3$.

4. Să se arate că aplicația $f: R_3[X] \to R,\quad f(P) = \int_0^1 P'(x)dx$ este o funcțională liniară şi să se scrie vectorul ataşat funcționalei în baza canonică a spațiului liniar $(R_3\ [X], R)$ şi în baza

$$G = \{g_1 = 1 - X, g_2 = 3X + X^3, g_3 = 2X + 3X^2, g_4 = 1\}.$$

4.2. FUNCȚIONALE BILINIARE

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Fie (X,K)și (Y,K) două spații vectoriale de dimensiune finită.
O aplicație $f:X\times Y\to K$ se numeşte *funcțională biliniară* dacă este liniară în raport cu fiecare argument, adică:
(1) $f(\alpha x+\beta y,z)=\alpha f(x,z)+\beta f(y,z), \forall\alpha,\beta\in K,\forall x,y\in X,\forall z\in Y$;
(2) $f(x,\alpha y+\beta z)=\alpha f(x,y)+\beta f(x,z), \forall\alpha,\beta\in K,\forall x\in X,\forall y,z\in Y$.

Definiția 2. Fie (X,K) un spațiu vectorial de dimensiune m, (Y,K) un spațiu vectorial de dimensiune n, $f:X\times Y\to K$ o funcțională biliniară, $E=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ o bază a spațiului liniar (X,K), $G=\{g_1,g_2,...,g_n\}$o bază a spațiului liniar (Y,K).
Notăm $a_{ij}=f(e_i,g_j),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$. Atunci $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ se numeşte *matricea ataşată funcționalei biliniare în bazele* E *şi* G.

Modificarea matricei unei funcționale biliniare la schimbarea bazelor în care se reprezintă

În condițiile definiției 2, fie A matricea ataşată funcționalei biliniare în bazele E şi G şi B matricea ataşată funcționalei biliniare în bazele F şi H. Fie C matricea de trecere de la baza E la baza F şi D matricea de trecere de la baza G la baza H. Atunci $B=C^t\cdot A\cdot D$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră aplicația $f : R^2 \times R^3 \to R$,
$f(x, y) = 2x_1 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_3$.

a) Să se arate că f este o funcțională biliniară.

b) Să se scrie matricea funcționalei în bazele canonice ale spațiilor liniare $\left(R^2, R\right)$ şi $\left(R^3, R\right)$

c) Să se scrie matricea funcționalei în bazele
$E = \left\{e_1 = (1,2)^t, e_2 = (3,4)^t\right\}$ şi
$G = \left\{g_1 = (3,1,1)^t, g_2 = (1,3,1)^t, g_3 = (1,1,3)^t\right\}$.

Rezolvare:

a) f este funcțională biliniară dacă este liniară în fiecare argument, adică:

1) $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z), \forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in R^2, \forall z \in R^3$;

2) $f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z), \forall \alpha, \beta \in R, \forall x \in R^2, \forall y, z \in R^3$.

Fie $\alpha, \beta \in R$. Avem că:

1) $f(\alpha x + \beta y, z) = f(\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2), (z_1, z_2, z_3)) =$
$= f\left((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2), (z_1, z_2, z_3)\right) = 2(\alpha x_1 + \beta y_1) z_1 -$
$1 - (\alpha x_1 + \beta y_1) z_2 + 3(\alpha x_2 + \beta y_2) z_3 = \alpha(2x_1 z_1 - x_1 z_2 + 3x_2 z_3) +$
$+ \beta(2y_1 z_1 - y_1 z_2 + 3y_2 z_3) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$.

2) $f(x, \alpha y + \beta z) = f\left((x_1, x_2), \alpha(y_1, y_2, y_3) + \beta(z_1, z_2, z_3)\right) =$
$= f\left((x_1, x_2), (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2, \alpha y_3 + \beta z_3)\right) =$
$= 2x_1(\alpha y_1 + \beta z_1) - x_1(\alpha y_2 + \beta z_2) + 3x_2(\alpha y_3 + \beta z_3) =$
$= \alpha(2x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_3) + \beta(2x_1 z_1 - x_1 z_2 + x_2 z_3) =$
$= \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$.

Din1) şi 2) rezultă că f este funcțională biliniară.

b) Matricea funcționalei în bazele canonice ale R^2 și R^3 este formată din coeficienții funcționalei: $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,2}\\ j=\overline{1,3}}}$, unde a_{ij} este coeficientul lui $x_i y_j$. Obținem: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

c) *Metoda I.* Matricea funcționalei f corespunzătoare bazelor E și G este $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,2}\\ j=\overline{1,3}}}$), unde $b_{ij}=f(e_i,g_j)$. Obținem că:

$b_{11}=f(e_1,g_1)=f\left((1,2)^t,(3,1,1)^t\right)=2\cdot1\cdot3-1\cdot1+3\cdot2\cdot1=11$;
$b_{12}=f(e_1,g_2)=2\cdot1\cdot1-1\cdot1+3\cdot2\cdot3=11$; prin urmare

$$B=\begin{pmatrix}11 & 5 & 19\\ 27 & 9 & 39\end{pmatrix}.$$

Metoda II. Folosim formula de transformare a matricei funcționalei la schimbarea bazelor: $B=C^t\cdot A\cdot D$. Matricea de trecere de la baza canonică a spațiului $\left(R^2,\ R\right)$ la baza E este $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, iar matricea de trecere de la baza canonică a spațiului $\left(R^3,\ R\right)$ la baza G este $D=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Rezultă că

$$B=C^t\cdot A\cdot D=\begin{pmatrix}11 & 5 & 19\\ 27 & 9 & 39\end{pmatrix}$$

2. Demonstrați că

$f:R_2[X]\times R_2[X]\to R, f(P,Q)=\int\limits_0^1 P'(x)Q'(x)dx$, este o funcțională biliniară simetrică și scrieți matricea funcționalei în

baza canonică a spațiului $R_2[X]$ şi în baza

$$G = \{g_1 = 1 - 3X, g_2 = 2 + X^2, g_3 = 4X - X^2\}.$$

Rezolvare:

Trebuie să aratăm că :

1) $f(\alpha P + \beta Q, T) = \alpha f(P,T) + \beta f(Q,T), \forall \alpha, \beta \in R, \forall P, Q, T \in R_2[X]$;

2) $f(P, \alpha Q + \beta T) = \alpha f(P,T) + \beta f(Q,T), \forall \alpha, \beta \in R, \forall P, Q, T \in R_2[X]$;

3) $f(P,Q) = f(Q,P), \forall P, Q \in R_2[X]$.

1) Fie $\alpha, \beta \in R$. Avem că:

$$f(\alpha P + \beta Q, T) = \int_0^1 (\alpha P + \beta Q)'(x) T'(x) dx =$$

$$= \alpha \int_0^1 P'(x) T'(x) dx + \beta \int_0^1 Q'(x) T'(x) dx = \alpha f(P,T) + \beta f(Q,T).$$

Analog se arată 2) şi în concluzie rezultă că f este funcțională biliniară.

3) Fie $P, Q \in R_2[X]$. Avem că:

$f(P,Q) = \int_0^1 P'(x) Q'(x) dx = \int_0^1 Q'(x) P'(x) dx = f(Q,P)$, prin urmare f este funcțională biliniară simetrică.

Baza canonică a lui $R_2[X]: E = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$

Matricea lui f în baza E este

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}, a_{ij} = f(e_i, e_j), i, j = \overline{1,3}$$

Avem că:

$$a_{11} = f(e_1, e_1) = f(1,1) = \int_0^1 1'1' dx = 0; \; a_{12} = a_{13} = 0 = a_{21} = a_{31};$$

$$a_{22} = f(x,x) = \int_0^1 dx = 1;\ a_{23} = a_{32} = \int_0^1 1 \cdot 2x dx = 1;\ a_{33} = \frac{4}{3}.$$

Obținem că $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Analog $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, $b_{ij} = f(g_i, g_j), i, j = \overline{1,3}.$

PROBLEME PROPUSE

1. Să se arate că aplicația $f : R^3 \times R^2 \to R$,
$f(x,y) = 2x_1y_2 - 5x_2y_2 + 3x_3y_1$ este o funcțională biliniară şi să se scrie matricea funcționalei în bazele canonice ale spațiilor liniare (R^3, R) şi (R^2, R) şi în bazele $E = \{e_1 = (0,1,1)^t,\ e_2 = (1,0,1)^t,$
$e_3 = (1,1,2)^t\}$ şi $G = \{g_1 = (1,0)^t,\ g_2 = (3,1)^t\}$.

R: Matricea funcționalei în bazele canonice ale spațiilor liniare (R^3, R) şi (R^2, R) este: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

matricea funcționalei în bazele E şi G este $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 11 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$.

2. Să se arate că aplicația
$f : R^3 \times R^3 \to R,\ f(x,y) = 3x_1y_2 + x_3y_2 - 4x_2y_3$ este o funcțională biliniară şi să se scrie matricea funcționalei în baza

canonică a spațiului liniar $\left(R^3,\ R\right)$ şi în baza

$$G = \left\{g_1 = (0,1,2)^t, g_2 = (1,3,1)^t, g_3 = (3,1,2)^t\right\}.$$

R: Matricea funcționalei în baza canonică a spațiului liniar $\left(R^3,\ R\right)$ este $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; matricea funcționalei în baza G este

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -6 \\ -20 & 0 & -20 \\ 3 & 29 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Să se demonstreze că aplicația

$$f : R_3[X] \times R_3[X] \to R, f(P,Q) = \int_0^1 P'(x)Q'(x)dx$$ este o

funcțională biliniară simetrică şi să se scrie matricea funcționalei în baza canonică a spațiului liniar $\left(R_3[X],\ R\right)$ şi în baza

$$G = \left\{g_1 = 1 - 3X, g_2 = 2 + X^3 - 2X, g_3 = 4X - X^2, g_4 = 1\right\}.$$

4. Să se demonstreze că aplicația

$$f : R_2[X] \times R_2[X] \to R, f(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q'(x)dx$$ este o

funcțională biliniară şi să se scrie matricea funcționalei în baza canonică a spațiului liniar $\left(R_2[X],\ R\right)$ şi în baza

$$G = \left\{g_1 = 3 - 5X, g_2 = 2 + X - 2X^2, g_3 = 4X - X^2\right\}.$$

4.3. FUNCȚIONALE PĂTRATICE

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Fie (X,K) un spațiu vectorial, unde $K \in \{R,C\}$. Fie $f : X \times X \to K$ o funcțională biliniară simetrică. Restricția funcției f la diagonala produsului cartezian $X \times X$, definită prin $diag(X \times X) = \{(x,x) / x \in X\}$, se numește *funcțională pătratică*; expresia functionalei pătratice în punctul (x,x) se notează $f(x,x)$ sau, mai simplu, $f(x)$, cu $f : X \to K$.

Definiția 2. Fie $V : X \to R$ o funcțională pătratică.

1) V se numeşte *pozitiv definită* dacă $V(x) > 0,\ \forall x \in X,\ x \neq 0$.
2) V se numeşte *semipozitiv definită* dacă $V(x) \geq 0,\ \forall x \in X,\ x \neq 0$.
3) V se numeşte *negativ definită* dacă $V(x) < 0,\ \forall x \in X,\ x \neq 0$.
4) V se numeşte *seminegativ definită* dacă $V(x) \leq 0,\ \forall x \in X,\ x \neq 0$.
5) V se numeşte *nedefinită* dacă $\exists x, y \in X$ *a.î.* $V(x) > 0$ şi $V(y) < 0$.

Observație: *Matricea asociată unei funcționale pătratice* într-o anumită bază este matricea asociată funcționalei biliniare asociate în baza respectivă.

Observație: Se spune că funcționala pătratică $V : X \to R$ a fost adusă la *forma canonic*ă dacă s-a determinat o bază G a spațiului X, pentru care $V(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, unde $x_G = (y_1, y_2, ..., y_n)^t$.

Aducerea unei funcționale pătratice la forma canonică se poate face prin:

- *Metoda Jacobi :*

Se calculează $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ (unde Δ_i este determinantul format din primele i linii şi coloane ale matricii A -matricea asociată funcționalei).

Dacă $\Delta_i \neq 0, \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \exists$ o bază a spațiului R^n în care funcționala se scrie :

$$V(y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2, \Delta_0 = 1 .$$

- *Metoda Gauss:*

Se caută $i \in \overline{1,n}$ astfel încât coeficientul lui x_i^2 să fie nenul şi se grupează toți termenii ce conțin x_i; din aceştia se formează un pătrat; termenii rămaşi nu vor mai conține x_i. Se repetă procedeul anterior până la obținerea formei canonice.

Observație. În cazul în care funcționala pătratică este degenerată, adică $V(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$, se alege (k,l) astfel încât $a_{kl} \neq 0$ şi se folosesc transformările

$x_k = z_k + z_l$, $x_l = z_k - z_l$, $x_i = z_i$, $i = \overline{1,n}, i \neq k, i \neq l$.

Astfel funcționala devine nedegenerată, adică $\exists i \in \overline{1,n}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$ şi poate fi adusă la forma canonică prin una din metodele cunoscute.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră funcționala pătratică
$V : R^3 \to R, V(x) = 3x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_2x_3$.

a) Să se scrie matricea funcționalei în baza canonică a spațiului (R^3, R).

b) Să se determine natura funcționalei.

Rezolvare:

a) Matricea funcționalei în baza canonică a spațiului (R^3, R) este $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}, a_{ij}$, unde a_{ij} este:

$$\begin{cases} coeficientul\ lui\ x_i^2,\ daca\ i = j \\ \frac{1}{2} \cdot coeficientul\ lui\ x_i x_j,\ daca\ i \neq j \end{cases}.$$

Atunci $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

b) Pentru a stabili natura funcționalei , calculăm minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ ai matricei A (unde Δ_i este format din primele i linii şi coloane ale matricii A).

- Dacă toți $\Delta_i > 0 \Rightarrow$ funcționala pătratică este pozitiv definită.
- Dacă Δ_i alternează ca semn, începând cu (-), atunci funcționala este negativ definită.
- Orice altă combinație de semne cu $\Delta_i \neq 0$ implică faptul că funcționala este nedefinită.

$$\Delta_1 = |3| = 3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{107}{4},$$

deci funcționala pătratică este nedefinită.

2. Să se determine $a \in R$ astfel încât funcționala pătratică:

$a)$ $V : R^3 \to R, V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

$b)$ $V : R^3 \to R, V(x) = -2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

să fie : 1) pozitiv definită;

2) negativ definită.

Rezolvare:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 5 \\ \Delta_3 = 5a - 2 \end{cases}$$

1) V este pozitiv definită $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(\frac{2}{5}, \infty\right)$.

2) V este negativ definită $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing$.

$$b)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -2 \\ \Delta_2 = 1 \\ \Delta_3 = 3a + 2 \end{cases}$$. Rezultă că:

1) V este pozitiv defintă $\Leftrightarrow$ $a \in \varnothing$.

2) V este negativ definită $\Leftrightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$.

3. Să se reducă la forma canonică funcționalele pătratice:

$a)$ $V: R^3 \to R, V(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

$b)$ $V: R^3 \to R, V(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$

şi să se stabilească natura acestora, folosind metoda Jacobi.

Rezolvare:

$a)$ Se calculează $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 3 \\ \Delta_2 = 5 \\ \Delta_3 = 18 \end{cases}$

Deoarece $\Delta_i \neq 0, \forall i = \overline{1,3} \Rightarrow \exists$ o bază a spațiului R^3 în care funcționala se scrie :

$$V(y) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 \Rightarrow V(y) = \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{3}{5} y_2^2 + \frac{5}{18} y_3^2.$$

Deoarece toți coeficienții funcționalei în noua bază sunt strict pozitivi, rezultă că V este pozitiv definită.

$b)$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -1 \\ \Delta_2 = 1 \\ \Delta_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow V(y) = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2,$

prin urmare V este negativ definită.

4. Să se reducă la forma canonică, folosind metoda Gauss, următoarele funcționale pătratice:

$a)$ $V: R^3 \to R, V(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

$b)$ $V: R^3 \to R, V(x) = 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$;

$c)\ V: R^3 \to R, V(x) = x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2x_3;$

$d)\ V: R^3 \to R, V(x) = 2x_1x_2 - 7x_1x_3 + 10x_2x_3;$

$e)\ V: R^3 \to R, V(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 25x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 6x_2x_3;$

$f)\ V: R^3 \to R, V(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3;$

$g)\ V: R^3 \to R, V(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$

Rezolvare:

a) Deoarece coeficientul lui x_1^2 este nenul, se grupează termenii care conțin variabila x_1:

$$V(x) = \underline{x_1^2} + 3x_2^2 - 2x_3^2 + \underline{2x_1x_2} - \underline{6x_1x_3} + 4x_2x_3.$$

Se formează un pătrat care să cuprindă toți termenii în care apare variabila x_1 și se obține:

$$V(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1(x_2 - 3x_3) + (x_2 - 3x_3)^2} - (x_2 - 3x_3)^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= \Big(\underbrace{x_1 + x_2 - 3x_3}_{y_1}\Big)^2 - x_2^2 + 6x_2x_3 - 9x_3^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3.$$

Se repetă procedeul pentru variabila x_2 și se obține:

$$V(x) = y_1^2 + \underline{2x_2^2} - 11x_3^2 + \underline{10x_2x_3} = y_1^2 + 2(x_2^2 + 5x_2x_3) - 11x_3^2 =$$

$$= y_1^2 + 2\left(x_2^2 + 2x_2\frac{5}{2}x_3 + \frac{25}{4}x_3^2 - \frac{25}{4}x_3^2\right) - 11x_3^2 =$$

$$= y_1^2 + \underbrace{2(x_2 + \frac{5}{2}x_3)^2}_{y_2} - \frac{25}{2}x_3^2 - 11x_3^2 = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{47}{2}y_3^2,$$

Rezultă că forma canonică a funcționalei pătratice V este

$V(y) = y_1^2 + 2y_2^2 - \frac{47}{2}y_3^2$, unde $y_1 = x_1 + x_2 - 3x_3$, $y_2 = x_2 + \frac{5}{2}x_3$, $y_3 = x_3$. prin urmare V este nedefinită.

b) $V(x) = \underline{3x_1^2} - x_2^2 + 5x_3^2 \underline{- 4x_1x_2} \underline{+ 2x_1x_3} + 8x_2x_3 =$

$= \frac{1}{3}\left(9x_1^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3\right) - x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 =$

$= \frac{1}{3}\left(9x_1^2 - 12x_1x_2 + 6x_1x_3\right) - x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 =$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\underbrace{3x_1 - 2x_2 + 2x_3}_{y_1}\right)^2 - 4\left(x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2\right)\right] - x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 =$$

$= \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 - \frac{1}{3}x_3^2 - x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_2x_3 =$

$= \frac{1}{3}y_1^2 \underline{- \frac{7}{3}x_2^2} + \frac{14}{3}x_3^2 \underline{+ \frac{28}{3}x_2x_3} = \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{7}{3}\left(x_2^2 - 4x_2x_3\right) + \frac{14}{3}x_3^2 =$

$$= \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{7}{3}\left(\underbrace{x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2} - 4x_3^2\right) + \frac{14}{3}x_3^2 =$$

$$= \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{7}{3}\left(\underbrace{x_2 - 2x_3}_{y_2}\right)^2 + \frac{28}{3}x_3^2 + \frac{14}{3}x_3^2 = \frac{1}{3}y_1^2 - \frac{7}{3}y_2^2 + 14y_3^2,$$

$y_1 = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3, y_2 = x_2 - 2x_3, y_3 = x_3$

Rezultă că funcționala pătratică V este nedefinită.

c) $V : R^3 \to R, V(x) = x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2x_3$.

Observăm că nu există i astfel încât $x_i \neq 0$.

Folosim transformarea:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= z_1 - z_2 \\ x_2 &= z_1 + z_2 \\ x_3 &= z_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ z_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{2} \\ z_3 = x_3 \end{cases}$$

$$V(x) = x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 5x_2 x_3 = z_1^2 - z_2^2 - 4z_1 z_3 + 4z_2 z_3 + 5z_1 z_3 + 5z_2 z_3 =$$

$$= z_1^2 - z_2^2 + z_1 z_3 + 9z_2 z_3 =$$

$$= z_1^2 + 2z_1\left(\frac{1}{2}z_3\right) + \left(\frac{1}{2}z_3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}z_3\right)^2 - z_2^2 + 9z_2 z_3 =$$

$$= \left(\underbrace{z_1 + \frac{1}{2}z_3}_{y_1}\right)^2 - \underline{z_2^2} - \frac{1}{4}z_3^2 + \underline{9z_2 z_3} =$$

$$= y_1^2 - \left(z_2^2 - 2z_2\frac{9}{2}z_3 + \frac{81}{4}z_3^2 - \frac{81}{4}z_3^2\right) - \frac{1}{4}z_3^2 = y_1^2 - \left(z_2 - \frac{9}{2}z_3\right)^2 + 20z_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(y) = y_1^2 - y_2^2 + 20y_3^2, \text{ unde } \begin{cases} y_1 = z_1 + \dfrac{1}{2}z_3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} + \dfrac{1}{2}x_3 \\ y_2 = z_2 - \dfrac{9}{2}z_3 = \dfrac{x_2 - x_1}{2} - \dfrac{9}{2}x_3 \\ y_3 = z_3 = x_3 \end{cases}.$$

Rezultă că funcționala este nedefinită.

d) $V(x) = 2x_1 x_2 - 7x_1 x_3 + 10x_2 x_3$.

Folosim transformarea:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 \\ x_2 = z_1 + z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

$$V(x) = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 7z_1z_3 + 7z_2z_3 + 10z_1z_3 + 10z_2z_3 =$$

$$= \underline{2z_1^2} - 2z_2^2 + \underline{3z_1^2} + 17z_2z_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4z_1^2 + 6z_1z_3\right) - 2z_2^2 + 17z_2z_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{(2z_1)^2 + 2(2z_1)\left(\frac{3}{2}z_3\right) + \frac{9}{4}z_3^2}_{} - \frac{9}{4}z_3^2\right] - 2z_2^2 + 17z_2z_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2z_1 + \frac{3}{2}z_3\right)^2 - \frac{9}{8}z_3^2 - \underline{2z_2^2} + \underline{17z_2z_3} =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}(4z_2^2 - 34z_2z_3) - \frac{9}{8}z_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}\left[(2z_2)^2 - 2(2z_2)\left(\frac{17}{2}z_3\right) + \left(\frac{17}{2}z_3\right)^2 - \left(\frac{17}{2}z_3\right)^2\right] - \frac{9}{8}z_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}\left(2z_2 - \frac{17}{2}z_3\right)^2 + 35z_3^2 = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 35y_3^2$$

Funcționala este nedefinită.

e) $V(x) = \underline{x_1^2} + 4x_2^2 + 25x_3^2 \underline{+ 4x_1x_2} \underline{- 10x_1x_3} + 6x_2x_3 =$

$$= x_1^2 + 2x_1(2x_2 - 5x_3) + (2x_2 - 5x_3)^2 - (2x_2 - 5x_3)^2 + 4x_2^2 + 25x_3^2 +$$

$$+ 6x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 - 5x_3)^2 + 26x_2x_3 = y_1^2 + 26x_2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_2 + z_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = \dfrac{x_2 + x_3}{2} \\ z_3 = \dfrac{x_3 - x_2}{2} \end{cases}$$

$V(x) = y_1^2 + 26(z_2^2 - z_3^2) = y_1^2 + 26y_2^2 - 26y_3^2$, deci funcționala este nedefinită, unde am notat:

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - 5x_3,\ y_2 = z_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3,$$

$$y_3 = z_3 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3.$$

3. Să se reducă la forma canonică funcționalele pătratice folosind metoda lui Gauss şi să se găsească baza în care este scrisă forma canonică:

$V : R^3 \to R, \quad V(x) = 2x_1^2 - 3x_2{}^2 + 7x_3{}^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 - 9x_2x_3$.

Rezolvare:

$$V(x) = \underline{2x_1{}^2} - 3x_2{}^2 + 7x_3{}^2 \underline{+ 3x_1x_2} \underline{- 4x_1x_3} - 9x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{2}(4x_1{}^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3) - 3x_2^2 + 7x_3^2 - 9x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2x_1)^2 + 2x_1(3x_2 - 4x_3) + (3x_2 - 4x_3)^2 - (3x_2 - 4x_3)^2\right] -$$

$$- 3x_2^2 + 7x_3^2 - 9x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{2x_1 + 3x_2 - 4x_3}_{y_1}\right)^2 - (9x_2^2 - 24x_2x_3 + 16x_3^2)\right] - 3x_2^2 +$$

$$= 7x_3^2 - 9x_2x_3 = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{9}{2}x_2^2 + 12x_2x_3 - 8x_3^2 - 3x_2^2 + 7x_3^2 - 9x_2x_3 =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{15}{2}x_2^2 - \underline{x_3^2} + \underline{3x_2x_3} = \frac{1}{2}y_1^2 - (x_3^2 - 3x_2x_3) - \frac{15}{2}x_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 - (x_3^2 - 3x_2x_3 + \frac{9}{2}x_2^2 - \frac{9}{2}x_2^2) - \frac{15}{2}x_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2}y_1^2 - \left(\underbrace{x_3 - \frac{3}{2}x_2}_{y_2}\right)^2 + \frac{9}{2}x_2^2 - \frac{15}{2}x_2^2 = \frac{1}{3}y_1^2 - y_2^2 - 3y_3^2,$$

$$y_1 = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3, y_2 = -\frac{3}{2}x_2 + x_3, y_3 = x_2$$

Deci $V(y) = \frac{1}{3}y_1^2 - y_2^2 - 3y_3^2$, unde

$y_1 = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3, y_2 = -\frac{3}{2}x_2 + x_3, y_3 = x_2$, sau

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Notăm cu E baza canonică şi cu $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ baza în care este scrisă forma canonică a funcționalei.

Coordonatele vectorului x în baza E sunt x_1, x_2, x_3, iar coordonatele vectorului x în baza G sunt y_1, y_2, y_3. Avem că:

$x_G = C^{-1} \cdot x_E$, unde C este matricea de trecere de la baza E la baza G.

Din relația scrisă mai sus rezultă că:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vom folosi metoda Gauss-Jordan pentru a obține matricea C, ale cărei coloane sunt chiar vectorii bazei G.

C^{-1}			I_3		
2	3	-4	1	0	0
0	-3/2	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
1	3/2	-2	1/2	0	0
0	-3/2	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
1	0	-1	1/2	1	0
0	1	-2/3	0	-2/3	0
0	0	2/3	0	2/3	1
1	0	0	1/2	2	3/2
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	3/2
I_3			C		

Obținem $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, deci baza în care este scrisă forma canonică este:

$$G = \left\{ g_1 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)^t, \ g_2 = (2, 0, 1, \ )^t, \ g_3 = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)^t \right\}.$$

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră funcționala pătratică $V: R^3 \to R,\ V(x) = 2x_1^2 - x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$. Scrieți matricea funcționalei în baza canonică a spațiului (R^3, R) și stabiliți natura funcționalei.

R: $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$; funcționala pătratică este nedefinită.

2. Să se determine $a \in R$ astfel încât funcționala pătratică: $V: R^3 \to R, V(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ să fie pozitiv definită.

R: $a \in \left(-\frac{3\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

3. Să se determine $a \in R$ astfel încât funcționala pătratică: $V: R^3 \to R, V(x) = ax_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + x_1x_3 + 4x_2x_3$ să fie nedefinită.

R: $a \in R$.

4. Să se determine $a \in R$ astfel încât funcționala pătratică: $V: R^3 \to R,\ V(x) = 2ax_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ să fie negativ definită.

R: $a \in \left(\frac{-8-3\sqrt{6}}{5}, \frac{-8+3\sqrt{6}}{5}\right)$.

5. Să se reducă la forma canonică următoarele funcționale pătratice:

$a)\ V : R^3 \to R,\ V(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;

$b)\ V : R^4 \to R,\ V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_3x_4$;

$c)\ V : R^3 \to R,\ V(x) = -5x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

$d)\ V : R^3 \to R,\ V(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$.

şi să se stabilească natura acestora folosind metoda Jacobi.

R: $a)\ V(x) = \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{3}{11}y_2^2 + \frac{11}{6}y_3^2$; funcțională pozitiv definită;

$b)\ V(x) = \frac{1}{2}y_1^2 - 2y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 - \frac{1}{2}y_4^2$; funcțională nedefinită;

$c)\ V(x) = -\frac{1}{5}y_1^2 - \frac{5}{9}y_2^2 - y_3^2$; funcțională negativ definită;

$d)\ V(x) = y_1^2 + \frac{1}{4}y_2^2 + y_3^2$; funcțională pozitiv definită.

6. Să se reducă la forma canonică următoarele funcționale pătratice prin metoda Gauss; să se precizeze natura funcționalelor şi să se găsească baza în care este scrisă forma canonică:

$a)\ V : R^3 \to R,\ V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;

$b)\ V : R^3 \to R,\ V(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$;

$c)\ V : R^3 \to R,\ V(x) = x_1x_2 + 5x_1x_3 - 3x_2x_3$;

$d)\ V : R^3 \to R,\ V(x) = 2x_1x_2 + 7x_2x_3 + 6x_1x_3$;

$e)\ V : R^4 \to R,\ V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_3x_4$.

R: $a)\ V(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, unde

$y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_2 + 2x_3,\ y_3 = x_3$; baza este

$G = \{g_1 = (1, 0, 0)^t, g_2 = (-1, 1, 0)^t, g_3 = (2, -2, 1)^t\}$;

b) $V(x) = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$, unde $y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$, $y_3 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$; baza este $G = \{g_1 = (1,\ 0,\ 0)^t, g_2 = (1,\ 1,\ 0)^t, g_3 = (3,\ 1,\ -1)^t\}$;

c) $V(x) = y_1^2 - y_2^2 + 15y_3^2$, unde $y_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3$, $y_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 4x_3$, $y_3 = x_3$; baza este $G = \{g_1 = (1,\ 1,\ 0)^t, g_2 = (-1,\ 1,\ 0)^t, g_3 = (3,\ -5,\ 1)^t\}$.

CAPITOLUL 5
SISTEME DE ECUAȚII ȘI INECUAȚII LINIARE

BREVIAR TEORETIC

Considerăm sistemul de ecuații liniare $Ax = b$, unde
$A \in M_{m,n}(R),\ b \in M_{m,1}(R)$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $x = (x_1, ..., x_n)^t$,
$b = (b_1, ..., b_n)^t$.

Definiția 1. Vectorul $x = (x_1, ..., x_n)^t$ se numește *soluție de bază* a sistemului $Ax = b$ dacă vectorii coloană ai matricei A corespunzători componentelor nenule ale soluției sunt liniar independenți.

Definiția 2. O soluție de bază a sistemului $Ax = b$ se numește *nedegenerată* dacă are exact m componente nenule și *degenerată* dacă are mai puțin de m componente nenule.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine toate soluțiile de bază ale sistemului de ecuații liniare:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}.$$

Care dintre acestea sunt soluții nedegenerate?

Rezolvare:

Notăm cu A matricea sistemului şi cu a_i, $i=\overline{1,4}$, vectorii formaţi din coloanele acesteia.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Determinăm toate bazele ce se pot forma cu vectorii a_i, $i=\overline{1,4}$. Numărul maxim de astfel de baze este $C_4^2=6$. Se ştie că doi vectori din spaţiul vectorial (R^2,R) formează o bază a acestui spaţiu dacă şi numai dacă determinantul ce are pe coloane componentele vectorilor este nenul. În baza acestui fapt, obţinem toate bazele ce se pot forma cu vectorii a_i, $i=\overline{1,4}$: $B_{12}=\{a_1,a_2\}$, $B_{14}=\{a_1,a_4\}$, $B_{23}=\{a_2,a_3\}$, $B_{34}=\{a_3,a_4\}$. Prin urmare, sistemul are 4 soluţii de bază, pe care le vom determina aplicând metoda eliminării complete:

Baza	Necunoscute principale	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1		[-1]	2	3	4	4
e_2		2	-3	-6	-6	-5
a_1		1	-2	-3	-4	-4
e_2		0	[1]	0	2	3
a_1	x_1	1	0	-3	0	2
a_2	x_2	0	1	0	[2]	3
a_1	x_1	1	0	[-3]	0	2
a_4	x_4	0	1/2	0	1	3/2
a_3	x_3	-1/3	0	1	0	-2/3
a_4	x_4	0	[1/2]	0	1	3/2
a_3	x_3	-1/3	0	1	0	-2/3
a_2	x_2	0	1	0	2	3

În a treia iterație, din coloana "b" putem citi soluția de bază corespunzătoare bazei B_{12} : $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 0, x_4 = 0$, care se mai poate scrie: $x_{B_{12}} = (2,3,0,0)^t$. Se observă că aceasta are exact două componente nenule, deci este o soluție nedegenerată.
Din următoarele iterații obținem următoarele soluții:
$x_{B_{14}} = \left(2,0,0,\frac{3}{2}\right)^t$, care este de asemenea o soluție nedegenerată;
$x_{B_{34}} = \left(0,0,-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right)^t$ este soluție de bază, nedegenerată;
$x_{B_{23}} = \left(0,3,-\frac{2}{3},0\right)^t$ este soluție de bază, nedegenerată.

2. Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \ge 4 \end{cases}.$$

a) Să se determine toate soluțiile de bază ale sistemului de ecuații atașat și soluțiile corespunzătoare ale sistemului de inecuații.

b) Fie funcția $f : R^2 \to R,\ f(x) = 3x_1 + 4x_2$. Să se determine soluția de bază a sistemului de inecuații pentru care f este maximă.

Rezolvare:
Scriem sistemul de ecuații atașat:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + y_1 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - y_2 = 4; \quad y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$ coloanele acesteia determină vectorii $a_i,\ i = \overline{1,4}$.

Sistemul admite cel mult $C_4^2 = 6$ soluții de bază. Bazele care se pot forma cu vectorii a_i, $i = \overline{1,4}$ sunt: $B_{12} = \{a_1, a_2\}$, $B_{13} = \{a_1, a_3\}$, $B_{14} = \{a_1, a_4\}$, $B_{23} = \{a_2, a_3\}$, $B_{24} = \{a_2, a_4\}$, $B_{34} = \{a_3, a_4\}$.

Baza	Necunoscute principale	a_1	a_2	a_3	a_4	b
e_1		[1]	2	1	0	8
e_2		2	-1	0	-1	4
a_1		1	2	1	0	8
e_2		0	-5	-2	[-1]	-12
a_1	x_1	1	2	[1]	0	8
a_4	x_4	0	5	2	1	12
a_3	x_3	1	2	1	0	8
a_4	x_4	-2	[1]	0	1	-4
a_3	x_3	5	0	1	-2	16
a_2	x_2	[-2]	1	0	1	-4
a_3	x_3	0	[5/2]	1	1/2	6
a_1	x_1	1	-1/2	0	-1/2	2
a_2	x_2	0	1	2/5	1/5	12/5
a_1	x_1	1	0	1/5	[3/5]	16/5
a_2	x_2	-1/3	1	1/3	0	4/3
a_4	x_4	5/3	0	1/3	1	16/3

a) *Soluțiile de bază ale sistemului de ecuații atașat* sunt:

$\overline{x_{B_{12}}} = \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}, 0, 0\right)^t$, $\overline{x_{B_{13}}} = (2,0,6,0)^t$ $\overline{x_{B_{14}}} = (8,0,0,12)^t$,

$\overline{x_{B_{23}}} = (0,-4,16,0)^t$ $\overline{x_{B_{24}}} = (0,4/3,0,16/3)^t$.

Observație. $\overline{x_{B_{34}}} = (0,0,8,-4)^t$ nu convine, deoarece $y_2 = -4 < 0$.

Soluțiile de bază ale sistemului de inecuații sunt:

$x_{B_{12}} = \left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right)^t$, $x_{B_{13}} = (2,0)^t$, $x_{B_{14}} = (8,0)^t$,

$x_{B_{23}} = (0,-4)^t$ $x_{B_{24}} = \left(0, \frac{4}{3}\right)^t$ $x_{B_{34}} = (0,0)^t$.

b) Calculăm valoarea functiei pentru fiecare solutie de bază şi obținem:

$f\left(\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right) = \frac{96}{5}$

$f(2,0) = 6$

$f(8,0) = 24$

$f(0,-4) = -16$

$f\left(0, \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}$

$f(0,0) = 0$.

Rezultă că soluția de bază pentru care se realizează maximul funcției f este $x_{B_{14}} = (8,0)^t$.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se determine toate soluțiile de bază ale sistemelor de ecuații liniare:

$$a)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -7 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 8 \end{cases};$$

$$b)\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12 \\ 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases};$$

$$c)\ \begin{cases} 6x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 11 \\ -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 - x_5 = -4 \end{cases}.$$

Care dintre acestea sunt soluții nedegenerate?

R: *a*) $x_{B_{12}} = (-1, -4, 0, 0)^t$; $x_{B_{13}} = \left(\frac{17}{15}, 0, -\frac{52}{15}, 0\right)^t$;

$x_{B_{14}} = (-1, 0, 0, 2)^t$; $x_{B_{23}} = \left(0, -\frac{17}{8}, -\frac{13}{8}, 0\right)^t$;

$x_{B_{34}} = \left(0, 0, -\frac{13}{8}, \frac{17}{16}\right)^t$; toate aceste soluții sunt nedegenerate.

2. Se consideră sistemele de inecuații:

$$a)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \le 15 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \end{cases}.$$

$$b)\ \begin{cases} -x_1 + 4x_2 \ge -6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 6x_1 + x_2 \ge 7 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 8 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \le 1 \\ 7x_1 - x_2 \ge -3 \end{cases}$$

Să se determine toate soluțiile de bază ale sistemului de ecuații atașat și soluțiile corespunzătoare ale sistemului de inecuații.

Fie funcția $f : R^2 \to R,\ f(x) = 6x_1 - x_2$. Să se determine soluția de bază a sistemului de inecuații pentru care f este minimă.

R: *a*) $\overline{x_{B_{12}}} = \left(\frac{5}{7}, -\frac{18}{7}, 0, 0\right)^t$; $\overline{x_{B_{13}}} = (2, 0, 9, 0)^t$;

$\overline{x_{B_{24}}} = (0, -3, 0, 1)^t$; $\overline{x_{B_{34}}} = (0, 0, 15, 4)^t$;

$x_{B_{12}} = \left(\frac{5}{7}, -\frac{18}{7}\right)^t$; $x_{B_{13}} = (2, 0)^t$; $x_{B_{24}} = (0, -3)^t$; $x_{B_{34}} = (0, 0)^t$. f este minimă pentru soluția $x_{B_{34}}$.

CAPITOLUL 6
OPTIMIZĂRI LINIARE

BREVIAR TEORETIC

Considerăm problema de programare liniară scrisă sub forma standard:

$$[opt]f = cx$$

$$(*)\ \begin{cases} Ax = b, & \text{unde} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$A \in M_{m,n}(R),\ b \in M_{m,1}(R),\ c \in M_{1,n}(R), c \in M_{1,n}(R),\ x \in M_{n,1}(R)$.

Definiția 1. Se numeşte *soluție posibilă (admisibilă)* a problemei $(*)$, orice vector $x \in R^n$ care satisface restricțiile problemei şi condițiile de semn. Notăm mulțimea soluțiilor posibile cu $X_p = \{x \in R^n \ /\ Ax = b,\ x \geq 0\}$.

Definiția 2. Se numeşte *soluție posibilă de bază* a problemei $(*)$, orice soluție posibilă $x \in R^n$ a problemei $(*)$ care îndeplineşte următoarele condiții:

1) are cel mult m componente srtict pozitive, iar celelalte sunt egale cu zero;
2) coloanele matricei A corespunzătoare componentelor strict pozitive sunt vectori liniar independenți.

Definiția 3. Fie $C \subset R^n$ o mulțime convexă. Un punct $v \in C$ se numeşte vârf al mulțimii C dacă nu există nici o pereche de vectori $x^1, x^2 \in C$ şi $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $v = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$.

Teorema 1. Orice soluție posibilă de bază a problemei $(*)$ este vârf al mulțimii soluțiilor posibile şi reciproc.

Definiția 4. Se numeşte *soluție optimă* a problemei $(*)$, orice soluție posibilă $x^o \in R^n$ a problemei $(*)$ care satisface şi condiția de optim, adică $f\left(x^o\right) = \underset{x \in X_p}{opt}\ f(x)$.

Notăm mulțimea soluțiilor optime cu X_o.

Teorema 2. Soluția optimă a problemei de programare liniară $(*)$ se află printre vârfurile mulțimii soluțiilor posibile X_p ale problemei.

Observația 1. Dacă problema $(*)$ are p soluții optime de bază: $x^{ok}, k = \overline{1, p}$, atunci soluția optimă generală are forma: $x^0 = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x^{ok}$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1$.

Observația 2. Spunem că o problemă de programare liniară admite:

1) optim unic, dacă X^o conține un singur element;
2) optim multiplu, dacă X^o conține cel puțin două elemente.

Vom prezenta în continuare metode de soluționare a problemelor de programare liniară.

6.1. REZOLVAREA GRAFICĂ A UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Această metodă este comod de aplicat în cazul problemelor de programare liniară cu două variabile.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră următoarea problemă de programare liniară:

$$[\max] f = 4x_1 + 7x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 1 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Să se determine mulțimea soluțiilor posibile ale problemei.

b) Să se determine mulțimea soluțiilor posibile de bază ale problemei.

c) Să se determine mulțimea soluțiilor optime ale problemei.

Rezolvare:

a) Reprezentăm grafic mulțimea soluțiilor posibile X_p, adică mulțimea punctelor planului ale căror coordonate verifică restricțiile problemei.

- Scriem ecuațiile ataşate celor trei inecuații şi reprezentăm grafic dreptele care le corespund acestora în plan:

$d_1 : x_1 + x_2 = 6$, care intersectează axele în punctele $(0,6)$ şi $(6,0)$.

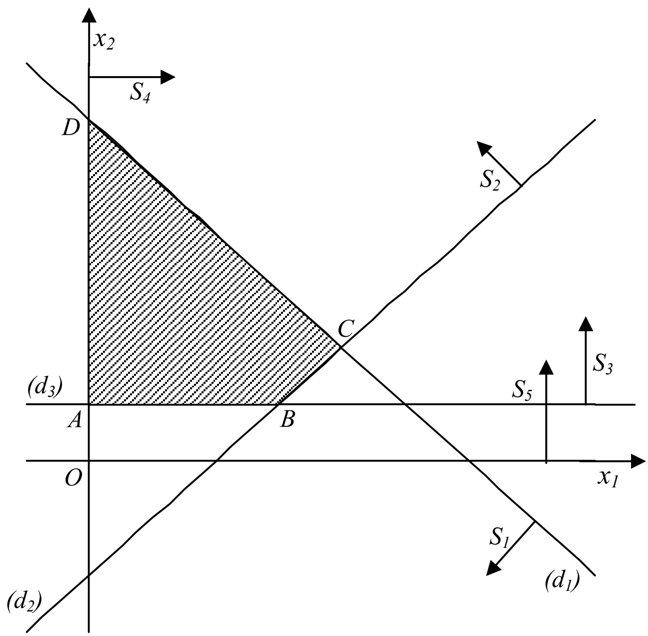
$d_2 : x_1 - x_2 = 2$, care intersectează axele în punctele $(0,-2)$ şi $(2,0)$.

$d_3 : x_2 = 1$, care este paralelă cu Ox_1 şi taie Ox_2 în punctul $(0,1)$.

- Determinăm mulțimea punctelor din plan ale căror coordonate verifică restricțiile problemei.

Se ştie că mulţimea punctelor planului ale căror coordonate verifică o inecuaţie reprezintă un semiplan.

Fie S_1 semiplanul determinat de inecuaţia $x_1 + x_2 \le 6$; punctul $(0, 0)$ verifică inecuaţia, deci S_1 conţine originea. Procedând analog în cazul celorlalte inecuaţii şi intersectând semiplanele obţinute ($S_2 : x_1 - x_2 \le 2$, $S_3 : x_2 \ge 1$, $S_4 : x_1 \ge 0$, $S_5 : x_2 \ge 0$), găsim:



Mulţimea soluţiilor posibile ale problemei este reprezentată de interiorul şi frontiera patrulaterului $ABCD$: $X_p = [ABCD]$.

$A = d_3 \cap Ox_2 \Rightarrow A(0,1)$.

$B = d_2 \cap d_3$; rezolvând sistemul $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ format din ecuaţiile celor două drepte, găsim: $B(3,1)$.

Analog, $C = d_1 \cap d_2 = C(4,2)$.

$D = d_1 \cap Ox_2 \Rightarrow D(0,6)$.

Deoarece mulțimea X_p este mărginită, rezultă că:

$b)$ Mulțimea X_{pb} a soluțiilor posibile de bază este formată din vârfurile patrulaterului $ABCD$, $X_{pb} = \{A,B,C,D\}$.

$c)$ Mulțimea X_{ob} a soluțiilor optime de bază este formată din acele elemente ale mulțimii X_{pb} (vârfuri ale mulțimii soluțiilor posibile) în care funcția obiectiv îşi atinge valoarea optimă (în acest caz, valoarea maximă).

Avem că $f(A) = f(0,1) = 7$; $f(B) = f(3,1) = 19$;
$f(C) = f(4,2) = 30$; $f(D) = f(0,6) = 42$, deci $X_{ob} = \{D\} = \{(0,6)\}$.

Mulțimea X_o a soluțiilor optime este $X_o = \{D\} = \{(0,6)\}$, adică $x_1 = 0,\ x_2 = 6$; valoarea optimă a funcției obiectiv este $\max f = 42$.

2. Să se rezolve următoarea problemă de programare liniară:

$$[\max] f = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

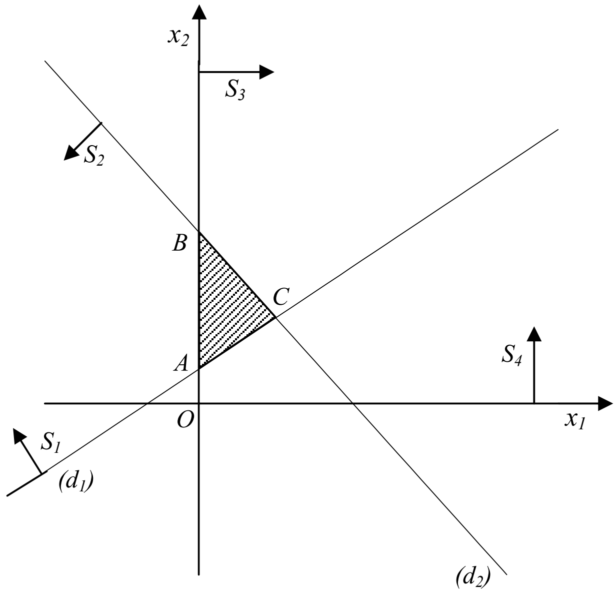
I. Determinăm mulțimea soluțiilor posibile ale problemei.

- Scriem ecuațiile ataşate celor trei inecuații şi reprezentăm grafic dreptele care le corespund acestora în plan:

$d_1 : -2x_1 + 5x_2 = 2$, care taie axele în punctele $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ şi $(-1, 0)$.

$d_2 : 2x_1 + 3x_2 = 6$ care taie axele în punctele $(0,2)$ şi $(3,0)$.

- Determinăm punctele din plan ale căror coordonate verifică inecuațiile sistemului, intersectând semiplanele $S_1 : -2x_1 + 5x_2 \geq 2$, $S_2 : 2x_1 + 3x_2 \leq 6$, $S_3 : x_1 \geq 0$, $S_4 : x_2 \geq 0$. Obținem:



Mulțimea X_p a soluțiilor posibile ale problemei este reprezentată de interiorul şi frontiera triunghiului ABC: $X_p = [ABC]$, unde $A\left(0,\frac{2}{5}\right)$, $B(0,2)$ şi $C\left(\frac{3}{2},1\right)$.

II. Calculăm valoarea funcției obiectiv în vârfurile mulțimii X_p. Avem că $f(A)=f\left(0,\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{5}$; $f(B)=f(0,2)=6$; $f(C)=f\left(\frac{3}{2},1\right)=6$. Observăm că funcția f atinge valoarea maximă în punctele $(0,2)$ şi $\left(\frac{3}{2},1\right)$. Conform observației 1 din breviarul teoretic, rezultă că soluția optimă a problemei este:

$X^o = \lambda(0,2)^t + (1-\lambda)\left(\frac{3}{2},1\right)^t$, $\lambda \in [0,1]$, adică segmentul $[BC]$.

Valoarea optimă a funcției obiectiv este $\max f = 6$.

3. Să se rezolve următoarea problemă de programare liniară:

$$[\min] f = 9x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \geq 1 \\ \ \ x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1\ , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

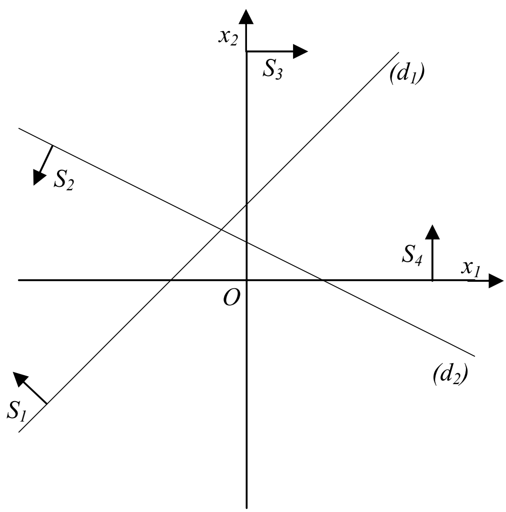
Determinăm mulțimea soluțiilor posibile ale problemei.

Dreptele ce determină semiplanele ataşate celor două inecuații sunt:

$d_1 : -x_1 + x_2 = 1$, care taie axele în punctele $(0,1)$ şi $(-1,0)$.

$d_2 : x_1 + 2x_2 = 1$, care taie axele în punctele $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ şi $(1,0)$.

Intersectăm semiplanele $S_1 : -x_1 + x_2 \geq 1$, $S_2 : x_1 + 2x_2 \leq 1$, $S_3 : x_1 \geq 0$, $S_4 : x_2 \geq 0$.



Obținem că mulțimea soluțiilor posibile ale problemei este vidă: $X_p = \varnothing$, prin urmare problema de programare liniară nu are soluție.

4. Să se rezolve următoarea problemă de programare liniară:

$$[\max] f = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

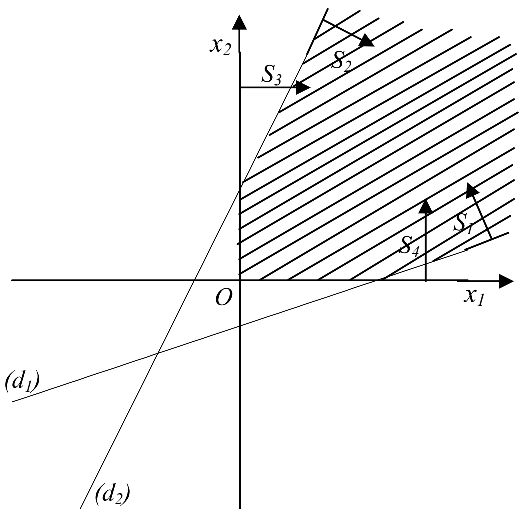
Determinăm mulțimea soluțiilor posibile ale problemei.

Dreptele ce determină semiplanele atașate celor două inecuații sunt:

$d_1 : x_1 - 3x_2 = 3$, care taie axele în punctele $(0,-1)$ şi $(3,0)$.

$d_2 : -2x_1 + x_2 = 2$ care taie axele în punctele $(0,2)$ şi $(-1,0)$.

Mulțimea X_p a soluțiilor posibile ale problemei este reprezentată de suprafața haşurată.



Deoarece mulțimea X_p este nemărginită şi problema este de maxim, rezultă că problema are optim infinit $(\max f = +\infty)$.

6.2. ALGORITMUL SIMPLEX PRIMAL

6.2.1. PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ CARE ADMIT SOLUȚIE INIȚIALĂ DE BAZĂ

PROBLEME REZOLVATE

Să se rezolve prin două metode problema de programare liniară:

$$[\max] f = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

A. Algoritmul simplex primal

Pasul I.

a) Aducem problema la forma standard:

$$[\max] f = 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

b) Scriem matricea sistemului (A), pentru a verifica dacă problema are soluție inițială de bază (această condiție este îndeplinită dacă A conține matricea unitate).

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$; baza inițială este $B = \{a_3, a_4\}$.

Pasul II. Alcătuim tabelul simplex:

B	C^B	X^B	5	3	0	0	Θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	
$\leftarrow a_3$	0	8	**[2]** ↓	1	1	0	8:2
a_4	0	7	1	2	0	1	7:1
	f_j	0	0	0	0	0	
		Δ_j	5	3	0	0	

- f_j *se obține calculând produsul scalar dintre fiecare coloană și coloana C^B;* de exemplu, primele două elemente din linia f_j s-au determinat astfel: $f_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \cdot 8 + 0 \cdot 7 = 0$;

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0 \cdot$$

- Δ_j *se calculează astfel:*

  $\Delta_j = C_j - f_j$, *pentru probleme de maxim;*

  $\Delta_j = f_j - C_j$, *pentru probleme de minim;*

(C_j reprezintă prima linie din tabel şi este formată din coeficienții funcției obiectiv.)

Pasul III. Verificăm criteriile:

- *Criteriul de optim finit:* $\Delta_j \le 0, \forall j = \overline{1,5}$;

  Acest criteriu nu se verifică , pentru că $\Delta_1 = 5 > 0$ şi $\Delta_2 = 3 > 0$.

- *Criteriul de optim infinit:* $\exists k \in \overline{1,5}$ *astfel încât* $\Delta_k > 0$ *şi toate elementele coloanei* a_k *sunt* ≤ 0.

  Acest criteriu nu se verifică, pentru că: $\Delta_1, \Delta_2 > 0$, dar coloanele a_1, a_2 conțin cel puțin câte o valoare strict pozitivă.

Pasul IV. Schimbăm baza:

- *Criteriul de intrare în bază: intră în bază vectorul* a_k *corespunzător diferenței maxime* $\Delta_j > 0$.

În cazul nostru, $\max\{5,3\}=5$, deci intră în bază vectorul a_1.

- *Criteriul de ieşire din bază: iese din bază vectorul a_l corespunzător raportului θ_k minim ($\theta_k > 0$). Coloana θ_k se determină făcând raportul între elementele coloanei X^B şi elementele strict pozitive ale coloanei vectorului care intră în bază.*

În cazul acesta, $\theta_l = \min\left\{\frac{8}{2},\frac{7}{1}\right\}=4$, deci iese din bază vectorul a_3.

Pasul V. Trecem la o nouă iterație:

- *Stabilim pivotul, care se găseşte la intersecția liniei vectorului care iese (a_l) cu coloana vectorului care intră în bază (a_k).*
- *Completăm coloanele B şi C^B*
- *Restul elementelor se determină cu metoda Gauss-Jordan.*
- *Calculăm noile valori f_j şi Δ_j.*

B	C^B	X^B	5	3	0	0	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	
$\leftarrow a_1$	5	4	1	[1/2] ↓	1/2	0	8
a_4	0	3	0	3/2	-1/2	1	2
	f_j	20	5	5/2	5/2	0	
		Δ_j	0	1/2	-5/2	0	

Algoritmul se repetă până când se verifică unul din criteriile de optim.

B	C^B	X^B	5	3	0	0	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	
a_1	5	3	1	0	2/3	-1/3	
a_2	3	2	0	1	-1/3	2/3	
	f_j	21	5	3	7/3	1/3	
		Δ_j	0	0	-7/3	-1/3	

În acest caz, observăm că se verifică criteriul de optim finit ($\Delta_j \le 0, \forall j=\overline{1,5}$).

Soluția optimă a problemei se citeşte din coloana X^B: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, iar valoarea maximă a funcției este $f_{\max} = 21$.

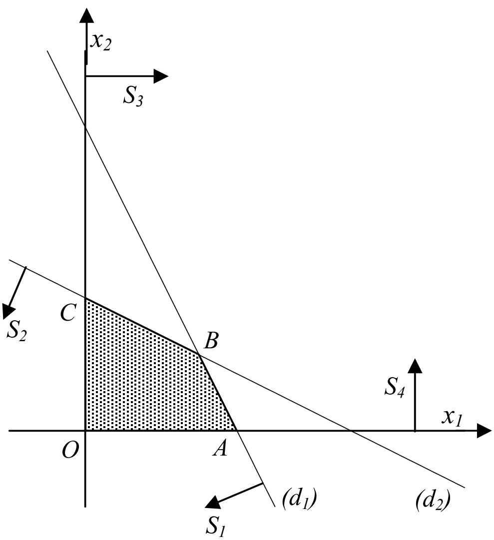
B. Metoda grafică

Dreptele ce determină semiplanele ataşate restricțiilor sunt:

$d_1 : 2x_1 + x_2 = 8$, care taie axele în punctele $(0,8)$ şi $(4,0)$.

$d_2 : x_1 + 2x_2 = 7$, care taie axele în punctele $\left(0,\frac{7}{2}\right)$ şi $(7,0)$.

Determinăm mulțimea soluțiilor posibile ale problemei, intersectând semiplanele $S_1 : x_1 + 2x_2 \le 8$, $S_2 : 2x_1 + x_2 \le 7$, $S_3 : x_1 \ge 0$, $S_4 : x_2 \ge 0$. Obținem:



Mulțimea X_p a soluțiilor posibile ale problemei este reprezentată de interiorul şi frontiera patrulaterului $OABC$.

Deoarece X_p este mărginită, optimul funcției obiectiv se realizează într-unul din vârfurile poligonului soluțiilor posibile. Acestea sunt: $O(0,0)$, $A\left(0,\frac{7}{2}\right)$, $B(3,2)$ şi $C(4,0)$.

Avem că: $f(0,0) = 0$, $f\left(0,\frac{7}{2}\right) = \frac{21}{2}$, $f(3,2) = 21$ şi $f(4,0) = 20$.

Prin urmare, soluția optimă a problemei este: $X^O = (3,2)^t$, $f_{\max} = 21$.

6.2.2. REZOLVAREA PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ CARE NU ADMIT SOLUȚIE INIȚIALĂ DE BAZĂ. METODA BAZEI ARTIFICIALE

PROBLEME REZOLVATE

Să se rezolve problema de programare liniară:

$$[\max] f = 5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \, , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

- Se aduce problema la forma standard:

$$[\max] f = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3\,x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

- Se scrie matricea sistemului(A) , pentru a verifica dacă problema are soluție inițială de bază (această condiție este îndeplinită dacă A conține matricea unitate).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{coloanele } a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4)$$

; lipsește vectorul $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ din matricea A și din această cauză la restricția a doua vom adăuga o variabilă artificială y .

Observație. Variabilele artificiale apar în funcția obiectiv cu coeficientul $+M$ la problemele de minim şi $-M$ la cele de maxim, unde $M \to \infty$.

Rezultă forma standard de lucru a problemei:

$[\max] f = 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - My$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + y = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Rezolvăm această problemă:

B	C^B	X^B	5	2	0	0	-M	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_3	0	6	2 ↓	3	1	0	0	3
$\leftarrow a_5$	-M	1	[1]	1	0	-1	1	1
	f_j	-M	-M	-M	0	M	-M	
		Δ_j	5+M	2+M	0	-M	0	
$\leftarrow a_3$	0	4	0	1	1	[2] ↓	-2	2
a_1	5	1	1	1	0	-1	1	-
	f_j	5	5	5	0	-5	5	
		Δ_j	0	-3	0	5	-M-5	
a_4	0	2	0	1/2	1/2	1	-1	
a_1	5	6	1	3/2	1/2	0	0	
	f_j	30	5	15/2	5/2	0	0	
		Δ_j	0	-11/2	-5/2	0	-M	

Discuție:

- După ce algoritmul simplex a luat sfârşit, dacă unei variabile artificiale îi corespunde în coloana X^B o valoare nenulă, atunci *problema nu are soluție*.
- După ce algoritmul simplex a luat sfârşit, dacă toate variabilele artificiale sunt egale cu 0, atunci decizia este *optim finit*, iar soluția problemei se citeşte din coloana X^B.

Rezultatele obținute în ultima iterație sunt: $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $y = 0$. Cum variabila artificială este $y = 0$, rezultă că problema are soluție optimă: $X^o = (6,0,0,2)^t$ şi $f_{\max} = 30$.

6.2.3. CAZURI SPECIALE ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE PROGRAMARE LINIARĂ

I. Probleme cu optim multiplu

Discuție. a) Dacă toate valorile $\Delta_j = 0$ *din ultima linie a tabelului simplex corespund unor vectori din baza optimă (ultima bază), atunci problema are soluție unică.*

b) Dacă $\exists \Delta_k = 0$ *şi vectorul* a_k *nu se află în baza optimă, atunci problema admite optim multiplu. Pentru găsirea unei alte soluții, se introduce în bază vectorul* a_k *.*

Soluția optimă generală este: $X^{opt} = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2, \lambda \in [0,1].$

PROBLEME REZOLVATE

Să se rezolve problema de programare liniară:

$$[\max] f = 8x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 22 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Rezolvare:

Forma standard a problemei este:

$$[\max] f = 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 22 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Deoarece lipsesc vectorii $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la prima şi la a doua restricție vom adăuga variabilele artificiale y_1 şi y_2 .

Rezultă forma standard de lucru:

$$[\max]f = 8x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 - My_1 - My_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + y_1 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 30 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 22 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Tabelul simplex:

B	C^B	X^B	8	5	2	0	0	-M	-M	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
a_6	-M	12	1↓	1	1	-1	0	1	0	12
← a_7	-M	30	[3]	2	1	0	0	0	1	10
a_5	0	22	2	1	1	0	1	0	0	11
	f_j	-42M	-4M	-3M	-2M	M	0	-M	-M	
		Δ_j	8+4M	5+3M	2+2M	-M	0	0	0	
← a_6	-M	2	0	1/3	[2/3]↓	-1	0	1	-1/3	3
a_1	8	10	1	2/3	1/3	0	0	0	1/3	30
a_5	0	2	0	-1/3	1/3	0	1	0	-1/3	6
	f_j	80-2M	8	$\frac{16-M}{3}$	$\frac{8-2M}{3}$	M	0	-M	$\frac{8+M}{3}$	
		Δ_j	0	$\frac{M-1}{3}$	$\frac{2M-2}{3}$	-M	0	0	$\frac{-8-4M}{3}$	
← a_3	2	3	0	[1/2]↓	1	-3/2	0	3/2	-1/2	6
a_1	8	9	1	1/2	0	1/2	0	-1/2	1/2	18
a_5	0	1	0	-1/2	0	1/2	1	-1/2	-1/2	-
	f_j	78	8	5	2	1	0	-1	3	
		Δ_j	0	0*	0	-1	0	-M+1	-M-3	

Din ultima iterație citim soluția optimă $X^1 = (9,0,3,0,1)^t$. În linia Δ_j avem $\Delta_1 = 0$, dar vectorul a_1 nu se află în baza optimă, de unde rezultă că problema are optim multiplu. Pentru găsirea unei alte soluții, introducem în bază vectorul a_1 şi din următoarea iterație va rezulta $X^2 = (6,6,0,4,0)^t$.

	f_j	78	8	5	2	1	0	-1	3
		Δ_j	0	0*	0	-1	0	-M+1	-M-3
a_2	5	6	0	1	2	-3	0	3	-1
a_1	8	6	1	0	-1	2	0	-2	1
a_5	0	4	0	0	1	-1	1	1	-1
	f_j	78	8	5	2	1	0	-1	3
		Δ_j	0	0	0	-1	0	-M-1	-M-3

Soluția optimă a problemei: $X^{opt} = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2, \lambda \in [0,1]$, adică $X^{opt} = (6+3\lambda, 6-6\lambda, 3\lambda, 4-4\lambda, \lambda)^t, \lambda \in [0,1]$.

II. Probleme care nu admit soluție

PROBLEME REZOLVATE

Să se rezolve problema de programare liniară:

$$[\min] f = 7x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Forma standard de lucru a problemei este:

$$[\min] f = 7x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + My$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + y = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

B	C^B	X^B	7	4	0	0	M	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_3	M	1	-1	1 ↓	-1	0	1	1/1
← a_4	0	1	1	[2]	0	1	0	1/2
	f_j	M	-M	M	-M	0	M	
		Δ_j	-M-7	M-4	-M	0	0	
a_1	M	1/2	-3/2	0	-1	-1/2	1	
a_4	4	1/2	1/2	1	0	1/2	0	
	f_j	M/3+2	2-3M/2	4	-M	2-M/2	M	
		Δ_j	-5-3M/2	0	-M	2-M/2	0	

$\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1,5}$, deci algoritmul a luat sfârşit. Rezultatele din ultima iteraţie sunt: $x_1 = 0,\ x_2 = 1/2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ y = 1/2.$
Deoarece variabilei artificiale y îi corespunde o valoare nenulă, rezultă că problema nu are soluţie.

III. Probleme cu optim infinit

PROBLEME REZOLVATE

$$[\max] f = 3x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq 3 \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Forma standard de lucru a problemei este:

$$[\max] f = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 - My$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + y = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

B	C^B	X^B	3	5	0	0	-M	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_5	-M	3	1	-3	-1	0	1	3
a_4	0	2	-2	1	0	1	0	-
	f_j	-3M	-M	3M	-M	0	-M	
		Δ_j	3+M	5-3M	-M	0	0	
a_1	3	3	1	-3	-1	0	1	-
a_4	0	8	0	-5	-2	1	2	-
	f_j	9	3	-9	-3	0	3	
		Δ_j	0	14	3	0	-M-3	

Se observă că se verifică criteriul de optim infinit (coloana a_2). În acest caz, problema are optim infinit $(\max f = +\infty)$.

PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve prin două metode următoarele probleme de programare liniară şi să se compare rezultatele:

1. $$[\max] f = 7x_1 + 8x_2$$ $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ **R:** $x_1 = 2,\ x_2 = 1;\ f_{max} = 22$.

2. $$[\min] f = 6x_1 + 7x_2$$ $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ **R:** $x_1 = 0,\ x_2 = 1;\ f_{min} = 7$.

3. $$[\max] f = 4x_1 + 6x_2$$ $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -2x_1 + 6x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ **R:** $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{3}{2};\ f_{max} = 13$.

4. $$[\max] f = 3x_1 + 7x_2$$ $$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ **R:** Problema are optim infinit.

5. $$[\max] f = 2x_1 + 3x_2$$ $$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ **R:** $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{3}{2};\ f_{max} = \frac{13}{2}$.

6. $$[\min] f = 5x_1 + 2x_2$$ $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ **R:** $x_1 = 0,\ x_2 = 1;\ f_{min} = 2$.

7. $[\min]f = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 \ge 28 \\ -5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: Problema nu are soluție..

8. $[\max]f = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $x_1 = 4,\ x_2 = 4;\ f_{\max} = 28$.

9. $[\max]f = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 3;\ f_{\max} = 15$.

10. $[opt]f = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $x_1 = 4,\ x_2 = 6;\ f_{\max} = 42$ dacă problema este de maxim**;**
$x_1 = 3,\ x_2 = 0;\ f_{\min} = 9$ dacă problema este de minim.

11. $[\max]f = 2x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 4x_2 \le 6 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $x_1 = 2,\ x_2 = 1;\ f_{\max} = 9$.

12. $$[\max]f = 2x_1 + 3x_2 \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{9}{2},\ x_2 = \frac{5}{2};\ f_{\max} = \frac{33}{2}$.

Să se rezolve următoarele probleme de programare liniară folosind algoritmul simplex primal:

13. $$[\max]f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 \quad \begin{cases} 3x_1 + x_3 + x_4 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = \frac{3}{2};\ f_{\max} = \frac{11}{2}$

14. $$[\max]f = 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 18 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 45 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 33 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = 9 - 9\lambda,\ x_2 = \frac{9}{2}\lambda,\ x_3 = 9 + \frac{9}{2}\lambda,\ \lambda \in [0,\ 1]$**;** $f_{\max} = 117$

15. $$[\min]f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \le 1 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 2, x_4 = 0;\ f_{\min} = \frac{11}{2}$

16.

$$[\max]f = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 \le 40 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 16 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 48 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 16, x_3 = 0, x_4 = 20;\ f_{\max} = 200$

17.

$$[\max]f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 40 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 50 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = 10,\ x_2 = 20, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0;\ f_{\max} = 130$

18.

$$[\min]f = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 63 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 42 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = 15,\ x_2 = 9, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0;\ f_{\max} = 42$

19.

$$[\min]f = 10x_1 + 5x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad + x_3 \ge 5 \\ 2x_1 - x_2 \quad - x_3 \le 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 4 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{14}{5}, x_3 = \frac{11}{5};\ f_{\min} = \frac{81}{5}$

20. $$[\min]f = 8x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 6x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 9 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 9, x_3 = 0, x_4 = 0;\ f_{\min} = 40$

21. $$[\max]f = 9x_1 + 10x_2 + 8x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 30 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 40 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 20, x_3 = 0;\ f_{\max} = 200$

22. $$[\max]f = 5x_1 + 10x_2 + 20x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = \frac{5}{3};\ f_{\max} = \frac{100}{3}$

23. $$[\min]f = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 8 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{4}{5},\ x_2 = \frac{28}{5}, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0;\ f_{\min} = -5$

24.
$$[\min]f = x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 14 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = \frac{11}{2}, x_4 = 2, x_5 = \frac{13}{2};\ f_{\min} = 7$

25.
$$[\max]f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 28 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 35 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 14, x_5 = 7;\ f_{\max} = 35$

26.
$$[\min]f = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 =, x_3 = 0, x_4 = \frac{3}{7}, x_5 = \frac{5}{7};\ f_{\min} = \frac{11}{7}$

27.
$$[\max]f = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 40 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 18, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 4;\ f_{\max} = 56$

28.
$$[\min]f = 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 30 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 6, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 8;\ f_{\min} = 14$

29. $[\max]f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_4 \le 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = 0, x_3 = \frac{7}{3}, x_4 = 0;\ f_{miax} = \frac{23}{3}$**.**

30. $[\min]f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 6;\ f_{\min} = 18$**;**

31. $[\max]f = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0,\ x_2 = 2, x_3 = 1;\ f_{\max} = 19$**;**

32. $[\min]f = 3x_1 - 2x_2 + 7x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 4 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{6}{7},\ x_2 = \frac{5}{7}, x_3 = 0;\ f_{\min} = \frac{8}{7}$**;**

33. $[\max]f = 4x_1 + 5x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{14}{5},\ x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = 0;\ f_{\max} = \frac{66}{5}$ **;**

34. $[\min]f = x_1 + 3x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3_3 \ge 10 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{2}{5},\ x_2 = 0, x_3 = \frac{16}{5};\ f_{\min} = \frac{34}{5}$ **;**

35. $[\max]f = -6x_1 + 5x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 7 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{4}{7},\ x_2 = 0, x_3 = \frac{13}{7};\ f_{\min} = 4$ **;**

36. $[\min]f = x_1 + 3x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1 \\ x_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 0, x_3 = \frac{3}{2};\ f_{\min} = -\frac{5}{2}$ **;**

37. $[\max] f = 4x_1 + 3x_2 + 10x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \le 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3 \\ x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0, x_3 = \frac{3}{5}$; $f_{\max} = \frac{34}{5}$ **;**

38. $[\max] f = 5x_1 + x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{5}$; $f_{\max} = \frac{37}{5}$ **;**

39. $[\max] f = 4x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 \ge 2 \\ x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

R: $x_1 = 1$, $x_2 = 0, x_3 = 2$, $x_4 = 0$; $f_{\max} = 16$ **;**

40. $[\min] f = 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 \le 1 \\ x_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

R: $x_1 = 0$, $x_2 = 9, x_3 = 0$, $x_4 = 4$; $f_{\min} = -16$ **.**

6.3. DUALITATE ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ

6.3.1. SCRIEREA PROBLEMEI DUALE

BREVIAR TEORETIC

Modelului matematic al unei probleme de programare liniară i se poate ataşa în mod unic o nouă problemă de programare, numită duala problemei primale. *Problema* inițială sau *primală* (PP) împreună cu *problema* sa *duală* (PD) formează un cuplu de probleme duale.

Considerăm modelul matematic al unei probleme de programare liniară.

- Spunem că o *restricție* este *concordantă* cu funcția obiectiv dacă este de tipul "$\leq$" în cazul unei probleme de maxim şi dacă este de tipul "$\geq$" în cazul unei probleme de minim.
- Spunem că o *restricție* este *neconcordantă* cu funcția obiectiv dacă este de tipul "$\geq$" în cazul unei probleme de maxim şi dacă este de tipul "$\leq$" în cazul unei probleme de minim.

Reguli de obținere a problemei duale din problema primală

1. Duala unei probleme de minim este o problemă de maxim, iar duala unei probleme de maxim este o problemă de minim.
2. Fiecărei restricții din PP îi corespunde o variabilă în problema duală; numărul variabilelor din PD este egal cu numărul restricțiilor din PP, iar numărul restricțiilor din PD este egal cu numărul variabilelor din PD.
3. Coeficienți funcției obiectiv din PD sunt termenii liberi din PP, iar termenii liberi din PD sunt coeficienți funcției obiectiv din PP.
4. Matricea coeficienților sistemului de restricții din PD este transpusa matricei coeficienților sistemului de restricții din PP.

5. *a*) Unei restricții concordante cu funcția obiectiv din PP îi corespunde o variabilă pozitivă în PD.

b) Unei restricții neconcordante cu funcția obiectiv din PP îi corespunde o variabilă negativă în PD.

c) Unei restricții de tip egalitate din PP îi corespunde o variabilă oarecare în PD.

6. *a*) Unei variabile pozitive din PP îi corespunde o restricție concordantă cu funcția obiectiv în PD.

b) Unei variabile negative din PP îi corespunde o restricție neconcordantă cu funcția obiectiv în PD.

c) Unei variabile oarecare din PP îi corespunde o restricție de tip egalitate în PD.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se scrie duala următoarei probleme de programare liniară:

$$[\min] f = 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_4 \le 9 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 \ge 4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \in R,\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Rezolvare:

Asociem fiecărei restricții din problema primală câte o variabilă: u_1, u_2, u_3.

$$[\min] f = 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$PP: \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_4 \le 9 & \mid u_1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 & \mid u_2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 \ge 4 & \mid u_3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \in R,\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Folosind regulile enunțate în breviarul teoretic, obținem problema

$$[\max] f = 9u_1 + 2u_2 + 4u_3$$

duală PD:

$$\begin{cases} -2u_1 + 4u_2 + 3u_3 \le 3 \\ 3u_1 - u_2 + u_3 \ge -7 \\ 2u_2 + 2u_3 = 2 \\ u_1 - 5u_3 \le -1 \\ u_1 \le 0,\ u_2 \in R,\ u_3 \ge 0 \end{cases}$$

Deoarece prima variabilă din PP este pozitivă ($x_1 \ge 0$), rezultă că prima restricție din PD este concordantă cu funcția obiectiv ("$\le$" pentru maxim). Analog s-a procedat şi pentru obținerea celorlalte restricții din PD.

Prima restricție din PP este neconcordantă cu funcția obiectiv ("$\le$" pentru minim), rezultă că prima variabilă din PD este negativă ($u_1 \le 0$). Analog s-a procedat şi pentru obținerea semnului celorlalte variabile din PD.

2. Să se scrie duala următoarei probleme de programare liniară:

$$[\max] f = 8x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_4 \le 9 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 \le 2 \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 \le 1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Rezolvare:

Asociem fiecărei restricții din problema primală câte o variabilă: u_1, u_2, u_3.

$$[\max] f = 8x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$PP: \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_4 \leq 9 & | u_1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 2 & | u_2 \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 1 & | u_3 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 & | u_4 \\ x_i \geq 0, \ \mathrm{i} = \overline{1,3} \end{cases}$$

Folosind regulile enunțate în breviarul teoretic, obținem problema duală:

$$[\min] f = 9u_1 + 2u_2 + u_3 + 4u_4$$

$$PD: \quad \begin{cases} 5u_1 + 4\mathrm{u}_2 + 6u_3 - 3u_4 \geq 8 \\ 3\mathrm{u}_1 - u_2 + 5u_3 + u_4 \geq 3 \\ 2u_1 + 3\mathrm{u}_2 - 4u_3 + 2u_4 \geq 4 \\ u_i \geq 0, \ \mathrm{i} = \overline{1,4} \end{cases}$$

Observație. În acest caz, spunem că PP şi PD formează un cuplu de probleme duale simetrice.

6.3.2. REZOLVAREA UNUI CUPLU DE PROBLEME PRIMALĂ-DUALĂ

PROBLEME REZOLVATE

Se dă următoarea problemă de programare liniară:

$[\min] f = 30x_1 + 12x_2 + 36x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ \quad\quad x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 \quad\quad + 2x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad \geq 6 \\ x_i \geq 0,\ \mathrm{i} = \overline{1,3} \end{cases}$$

$a)$ Să se construiască problema duală.

$b)$ Să se rezolve problema duală.

$c)$ Să se determine soluțiile optime ale cuplului de probleme primală-duală.

Rezolvare:

$$[\max] f = 3u_1 + 5u_2 + u_3 + 6u_4$$

$a)\ PD:$
$$\begin{cases} u_1 + u_3 + 2u_4 \leq 30 \\ 2u_1 + u_2 + u_4 \leq 12 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 36 \\ u_i \geq 0,\ \mathrm{i} = \overline{1,4} \end{cases}$$

$b)$ Aducem problema duală la forma standard:

$[\max] g = 3u_1 + 5u_2 + u_3 + 6u_4 + 0u_5 + 0u_6 + 0u_7$

$$\begin{cases} u_1 + u_3 + 2u_4 + u_5 = 30 \\ 2u_1 + u_2 + u_4 + u_6 = 12 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 + u_7 = 36 \\ u_i \geq 0,\ \mathrm{i} = \overline{1,7} \end{cases}$$

Realizăm tabelul simplex:

B	C^B	U^B	3	5	1	6	0	0	0	
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	
a_5	0	30	1	0	1	2 ↓	1	0	0	15
← a_6	0	12	2	1	0	[1]	0	1	0	12
a_7	0	36	1	1	1	0	0	0	1	-
	g_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
		Δ_j	3	5	1	6	0	0	0	
← a_5	0	6	-3	-2	[1] ↓	0	1	-2	0	6
a_4	6	12	2	1	0	1	0	1	0	-
a_7	0	36	1	1	1	0	0	0	1	36
	g_j	72	12	6	0	6	0	6	0	
		Δ_j	-9	-1	1	0	0	0	0	
a_3	1	6	-3	-2 ↓	1	0	1	-2	0	-
a_4	6	12	2	1	0	1	0	1	0	12
← a_7	0	30	4	[3]	0	0	-1	2	1	10
	g_j	78	9	4	6	12	1	4	0	
		Δ_j	-6	1	-5	0	-1	-4	0	
a_3	1	26	-1/3	0	1	0	1/3	-2/3	0	
a_4	6	2	2/3	0	0	1	1/3	1/3	0	
a_2	5	10	4/3	1	0	0	-1/3	2/3	1/3	
	g_j	88	31/3	5	1	6	2/3	14/3	5/3	
		Δ_j	-22/3	0	0	0	-2/3	-14/3	-5/3	

Soluția optimă a problemei duale este:

$u_1 = 0,\ u_2 = 5,\ u_3 = 1,\ u_4 = 6,\ u_5 = 0,\ u_6 = 0,\ u_7 = 0;\ g_{\max} = 88.$

c) Pentru a determina soluția optimă a problemei primale se procedează în felul următor:

-se rezolvă problema duală cu ajutorul algoritmului simplex primal;

-în ultima iterație a algoritmului simplex primal, pe linia g_j, în dreptul coloanelor ce corespund vectorilor care au format baza inițială, se citeşte soluția optimă a problemei primale.

Prin urmare, soluția optimă a problemei primale este:

$x_1 = 2/3,\ x_2 = 14/3,\ x_3 = 5/3;\ f_{\min} = g_{\max} = 88.$

Observație. Este utilă rezolvarea problemei duale în locul celei primale atunci când duala este mai uşor de rezolvat cu ajutorul algoritmului simplex primal, cum a fost cazul problemei anterioare.

PROBLEME PROPUSE

Să se scrie duala următoarelor probleme de programare liniară:

1.

$$[\max]f = 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_4 \geq 6 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in R,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

R: $PD:$

$$[\min]g = 6u_1 + 5u_2 + 4u_3$$

$$\begin{cases} 4u_1 + 7u_2 + 3u_3 \geq 5 \\ 3u_1 - u_2 + u_3 \leq -1 \\ 2u_2 + 2u_3 = 4 \\ 5u_1 - 5u_3 \geq 3 \\ u_1 \leq 0,\ u_2 \in R,\ u_3 \geq 0 \end{cases}$$

2.

$$[\min]f = 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \in R,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$[\max]g = 2u_1 + u_2 + 3u_3$$

R: *PD*
$$\begin{cases} -2u_1 + 4u_2 + 3u_3 \le 3 \\ 3u_1 - u_2 + u_3 = -7 \\ 3u_2 + 2u_3 \ge 2 \\ u_1 - 5u_3 \le -1 \\ u_1 \le 0,\ u_2 \ge 0,\ u_3 \in R \end{cases}$$

$$[\min]f = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4$$

3.
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_4 \ge 7 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 4 \\ x_1 \in R,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$[\max]g = 7x_1 + 4x_2$$

R: *PD*:
$$\begin{cases} -2u_1 + 3u_2 = 8 \\ 3u_1 + u_2 \ge 6 \\ 2u_2 \le 3 \\ u_1 - 5u_2 \le -1 \\ u_1 \ge 0,\ u_2 \le 0 \end{cases}$$

$$[\max]f = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3$$

4.
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \in R \end{cases}$$

$$[\min]g = 4u_1 + 2u_2 + u_3$$

R:
$$\begin{cases} -2u_1 + 4u_2 + 3u_3 \ge -2 \\ 3u_1 - u_2 + u_3 \le 7 \\ 2u_2 + 3u_3 = 2 \\ u_1 \ge 0,\ u_2 \in R,\ u_3 \le 0 \end{cases}$$

5. Se dă următoarea problemă de programare liniară:
$[\min]f = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \qquad \geq 6 \\ \qquad x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 \qquad + 2x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0, \ \mathrm{i} = \overline{1,3} \end{cases}$$

a) Să se construiască problema duală.

b) Să se rezolve problema duală.

c) Să se determine soluțiile optime ale cuplului de probleme primală-duală.

$$[\max]g = 3u_1 + 6u_2 + 5u_3 + u_4$$

R: *a*) PD:

$$\begin{cases} u_1 + 2\mathrm{u}_2 + u_4 \leq 5 \\ 2u_1 + u_2 + 2u_3 \leq 2 \\ 3u_1 + 3u_3 + 2u_4 \leq 6 \\ u_i \geq 0, \ \mathrm{i} = \overline{1,4} \end{cases}$$

c) $X^o = (1,\ 4,\ 0)^t$; $f_{\min} = 13$; $U^o = (0,\ 2,\ 0,\ 1)^t$; $g_{\max} = 13$.

6. Se dă următoarea problemă de programare liniară:
$[\max]f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 \qquad \leq 6 \\ \qquad x_2 + x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0, \ \mathrm{i} = \overline{1,3} \end{cases}$$

a) Să se construiască problema duală.

b) Să se determine soluțiile optime ale cuplului de probleme primală-duală.

$$[\min]g = 3u_1 + 6u_2 + 5u_3$$

R: *a*) *PD*:
$$\begin{cases} u_1 + 2\mathrm{u}_2 \geq 3 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \geq 2 \\ u_1 + u_3 \geq 4 \\ u_i \geq 0,\ \mathrm{i} = \overline{1,3} \end{cases}$$

b) $X^o = (0,\ 0,\ 3)^t$; $f_{\max} = 12$; $U^o = (4,\ 0,\ 0)^t$; $g_{\min} = 12$.

7. Se dă următoarea problemă de programare liniară:
$$[\min]f = 8x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 6x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 10 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 9 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

a) Să se construiască problema duală.

b) Să se rezolve problema duală.

c) Să se determine soluțiile optime ale cuplului de probleme primală-duală.

$$[\max]g = 10u_1 + 9u_2 + 8u_3$$

R: *a*) *PD*:
$$\begin{cases} 2u_1 - \mathrm{u}_2 - 2u_3 \leq 8 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \leq 4 \\ 2u_1 + u_3 + 3x_3 \leq 12 \\ -u_1 + 3u_3 + x_3 \leq 6 \\ u_i \geq 0,\ \mathrm{i} = \overline{1,4} \end{cases}$$

c) $X^o = (0,\ 10,\ 0,\ 0)^t$; $f_{\min} = 40$; $U^o = (4,\ 0,\ 0)^t$; $g_{\max} = 40$.

8. Se dă următoarea problemă de programare liniară:

$[\max] f = 7x_1 - 9x_2 + 8x_3$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 \le 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 8 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

a) Să se construiască problema duală.

b) Să se determine soluțiile optime ale cuplului de probleme primală-duală.

$$[\min] g = 7u_1 + 3u_2 + 2u_3 + 8u_4$$

R: *a*) PD: $\begin{cases} -3u_1 + u_2 + 2u_3 - u_4 \ge 7 \\ -u_1 - 2u_2 - u_3 + 2u_4 \ge -9 \\ u_1 + 3u_2 - u_3 - 2u_4 \ge 8 \\ u_i \ge 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases}$;

b) $X^o = \left(\frac{9}{7}, 0, \frac{4}{7}\right)^t$; $f_{\max} = \frac{95}{7}$; $U^o = \left(0, \frac{23}{7}, \frac{13}{7}, 0\right)^t$; $g_{\max} = \frac{95}{7}$.

6.4. ALGORITMUL SIMPLEX DUAL

PROBLEME REZOLVATE

Să se rezolve următoarea problemă de programare liniară, utilizând algoritmul simplex dual:

$$[\min] f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le -12 \\ -3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 \le -9 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \le -15 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Rezolvare:

- Forma standard de lucru a problemei este:

$$[\min] f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = -12 \\ -3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + x_6 = -9 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_7 = -15 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,7} \end{cases}$$

- Realizăm prima iterație din tabelul simplex şi verificăm dacă avem soluție dual realizabilă ($\Delta_j \le 0, \ \forall j = \overline{1,7}$):

C^B	Baza	X^B	3	2	4	1	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0	a_5	-12	-5	1	-4	2↓	1	0	0
0	a_6	- 9	-3	-1	-3	1	0	1	0
0	← a_7	-15	-1	2	-2	[-1]	0	0	1
	f_j	0	0	0	0	0	0	0	0
		Δ_j	-3	-2	-4	-1	0	0	0

- Aplicăm *criteriul de ieşire din bază:* iese din bază vectorul corespunzător celei mai mici valori negative din coloana X^B; în cazul acesta, $\min\{-12,-9,-15\}=-15$, deci iese din bază vectorul a_7.
- Aplicăm *criteriul de intrare în bază:* se calculează rapoartele dintre elementele liniei Δ_j şi elementele strict negative de pe linia vectorului care iese din bază; va intra în bază vectorul corespunzător celui mai mic raport; în cazul nostru, $\min\left\{\frac{-3}{-1},\frac{-4}{-2},\frac{-1}{-1}\right\}=1$, deci va rezulta că intră în bază vectorul a_4.
- Stabilim pivotul şi elementele din următoarea iterație le vom determina folosind metoda Gauss-Jordan.

- *Algoritmul simplex dual ia sfârşit* când se produce unul din următoarele evenimente:

- toate elementele coloanei X^B sunt mai mari sau egale cu zero; în acest caz, decizia este *optim finit,* iar soluția se citeşte din coloana X^B;
- coloana X^B conține elemente strict negative, iar pe linia unui vector corespunzător unei valori strict negative avem numai valori mai mari sau egale cu zero; în acest caz, decizia este: *problema nu are soluție*.

Rezultă următoarele iterații:

C^B	Baza	X^B	3	2	4	1	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
0	← a_5	-42	-7	5	[-8] ↓	0	1	0	2
0	a_6	-24	-4	1	-5	0	0	1	1
1	a_4	15	1	-2	2	1	0	0	-1
	f_j	15	1	-2	2	1	0	0	-1
		Δ_j	-2	-4	-2	0	0	0	-1
4	a_3	21/4	7/8	-5/8	1	0	-1/8	0	-1/4
0	a_6	9/4	3/8	-17/8	0	0	-5/8	1	-1/4
1	a_4	9/2	–3/4	-3/4	0	1	1/4	0	-1/2
	f_j	51/2	11/4	-13/4	4	1	-1/4	0	-3/2
		Δ_j	-1/4	-21/4	0	0	-1/4	0	-3/2

Deoarece toate elementele coloanei X^B sunt pozitive, rezultă că problema are soluție optimă: $X^o = \left(0,\ 0,\ \frac{21}{4},\ \frac{9}{2},\ 0,\ \frac{9}{4}\right)^t$, iar valoarea minimă a funcției obiectiv corespunzătoare acestei soluții este: $f_{\min} = 4 \cdot \frac{21}{4} + 1 \cdot \frac{9}{2} = \frac{51}{2}$.

PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve următoarele probleme de programare liniară folosind, acolo unde este posibil, algoritmul simplex dual:

1. $[\min] f = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 \le -2 \\ -2x_1 - x_2 - 3x_3 \ge -1 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

R: $X^o = (0,\ 1,\ 0)^t$ **;** $f_{\min} = 4$

2. $[\max] f = -x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \le -6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \le -2 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

R: $X^o = (0,\ 0,\ 2,\ 0)^t$ **;** $f_{\max} = -2$

3. $[\min] f = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \le -2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 \le -3 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

R: $X^o = \left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{5},\ 0\right)^t$ **;** $f_{\min} = \frac{18}{5}$

4. $[\max] f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

R: $X^o = \left(0,\ 0,\ 11 - 11\lambda,\ 5 - \frac{11}{3}\lambda,\ \frac{11}{3}\lambda\right)^t$, $\lambda \in [0,\ 1]$**;** $f_{\max} = 13$

$$[\min] f = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

5. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 \le -4 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \le -6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \le -12 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ **R:** $X^o = (7,\ 5,\ 0)^t$ **;** $f_{\min} = 55$

$$[\min] f = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4$$

6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases}$ **R:** Nu se poate aplica algoritmul simplex dual (ASD); folosind algoritmul simplex primal (ASP), se obține soluția optimă $X^o = \left(0,\ 0,\ \frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right)^t$**,** pentru care $f_{\min} = 3$**.**

$$[\max] f = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

7. $\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le -2 \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,3} \end{cases}$ **R:** $X^o = \left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2},\ 0\right)^t$; $f_{\max} = \frac{27}{2}$.

$$[\min] f = 5x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

8. $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \le -5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \le -4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le 1 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$ **R:** $X^o = \left(0,\ \frac{14}{3},\ \frac{1}{3}\right)^t$ **;** $f_{\min} = \frac{44}{3}$**.**

$$[\max] f = -3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4$$

9. $\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_i \ge 0, \ i = \overline{1,4} \end{cases}$ **R:** Nu se poate aplica ASD; folosind ASP, se obține soluția optimă $X^o = \left(0,\ \frac{12}{7},\ 0,\ \frac{3}{7}\right)^t$**,** pentru care $f_{\max} = -\frac{15}{7}$**.**

10. $\begin{cases} [opt]f = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -3 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$ **R:** Dacă problema este de maxim,

$X^o = (3,\ 0,\ 2,\ 0)^t$ **,** $f_{max} = 9$ **;** dacă problema este de minim,

$X^o = \left(\frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{10}{3}\right)^t$ **,** $f_{min} = -13$ **.**

11. $\begin{cases} [\min]f = 8x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \leq -1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,2} \end{cases}$ **R:** Problema nu are soluție.

6.5. REOPTIMIZĂRI

PROBLEME REZOLVATE

Se consideră problema de programare liniară:

$$[\max] f = 7x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2} \end{cases}$$

a) Să se determine soluția optimă a acestei probleme.

b) Să se determine soluția optimă a problemei în cazul în care coeficienții funcției obiectiv devin:

b_1) $\tilde{c} = (4,3)$;

b_2) $\tilde{c} = (5,5)$;

b_3) $\tilde{c} = (1,6)$.

c) Să se determine soluția optimă a problemei în cazul în care temenii liberi devin:

c_1) $\tilde{b} = (1,2,3)^t$;

c_2) $\tilde{b} = (5,3,1)^t$.

Rezolvare:

a) Forma standard de lucru a problemei este:

$$[\max] f = 7x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 9 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Pentru rezolvarea problemei vom aplica algoritmul simplex primal. Realizăm tabelul simplex:

C^B	Baza	X^B	7	4	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	9	-2↓	3	1	0	0
0	$\leftarrow a_4$	3	[1]	-1	0	1	0
0	a_5	9	1	1	0	0	1
	f_j	0	0	0	0	0	0
		Δ_j	7	4	0	0	0
0	a_3	15	0	1↓	1	2	0
7	a_1	3	1	-1	0	1	0
0	$\leftarrow a_5$	6	0	[2]	0	-1	1
	f_j	21	7	-7	0	7	0
		Δ_j	0	11	0	-7	0
0	a_3	12	0	0	1	5/2	-1/2
7	a_1	6	1	0	0	1/2	1/2
4	a_2	3	0	1	0	-1/2	1/2
	f_j	54	7	4	0	3/2	11/2
		Δ_j	0	0	0	-3/2	-11/2

Rezultă soluția optimă: $X^o = (6,\ 3,\ 12,\ 0,\ 0)^t$, $f_{\max} = 54$.

b) Modificarea coeficienților funcției obiectiv

Alcătuim un tabel simplex în care vom copia datele din ultima iterație a tabelului precedent, cu excepția liniei C_j (unde vom scrie noii coeficienți ai funcției obiectiv, dați de $\tilde{c}$), a coloanei C^B (unde vom trece tot coeficienții funcției obiectiv dați de $\tilde{c}$) şi, evident, a liniilor f_j şi Δ_j. După ce calculăm Δ_j sunt posibile două situații:

1) toate elementele liniei Δ_j sunt negative sau egale cu zero şi

în acest caz se poate citi soluția optimă a problemei modificate; soluția optimă a problemei modificate coincide cu soluția optimă

a problemei inițiale. Valoarea optimă a funcției obiectiv este dată de primul element al liniei f_j;

2) pe linia Δ_j există cel puțin un element strict pozitiv şi în acest caz se aplică în continuare algoritmul simplex primal, până la obținerea soluției optime a problemei modificate.

b_1) În cazul în care $\tilde{c} = (4,3)$ obținem următorul tabel simplex:

C^B	Baza	X^B	4	3	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	12	0	0	1	5/2	-1/2
4	a_1	6	1	0	0	1/2	1/2
3	a_2	3	0	1	0	-1/2	1/2
	f_j	33	4	3	0	1/2	7/2
		Δ_j	0	0	0	-1/2	-7/2

Se observă că toate elementele liniei Δ_j sunt negative sau egale cu zero. Rezultă că soluția optimă a problemei modificate coincide cu soluția optimă a problemei inițiale:

$\tilde{X}^o = (6, 3, 12, 0, 0)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 33$.

b_2) În cazul în care $\tilde{c} = (5,5)$ obținem următorul tabel simplex:

C^B	Baza	X^B	5	5	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	$\leftarrow a_3$	12	0	0	1	**5/2** $\downarrow$	-1/2
5	a_1	6	1	0	0	1/2	1/2
5	a_2	3	0	1	0	-1/2	1/2
	f_j	45	5	5	0	0	5
		Δ_j	0	0	0	0	-5
0	a_4	24/5	0	0	2/5	1	-1/5
5	a_1	18/5	1	0	-1/5	0	3/5
5	a_2	27/5	0	1	1/5	0	2/5
	f_j	45	5	5	0	0	5
		Δ_j	0	0	0	0	-5

Observăm că toate elementele liniei Δ_j din prima iterație sunt negative sau egale cu zero, prin urmare soluția optimă a problemei inițiale este soluție optimă şi pentru problema modificată: $\widetilde{X}^1 = (6, 3, 12, 0, 0)^t$. Deoarece pe linia Δ_j există $\Delta_4 = 0$, dar vectorul a_4 nu se află în baza optimă, rezultă că problema are optim multiplu. Introducând în bază vectorul a_4, obținem o nouă soluție optimă: $\widetilde{X}^2 = (18/5,\ 27/5,\ 0,\ 24/5,\ 0)^t$.

Soluția optimă în formă generală a problemei este: $\widetilde{X}^{opt} = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2, \lambda \in [0,1]$, iar $\widetilde{f}_{\max} = 45$.

b_3) În cazul în care $\widetilde{c} = (1,6)$ obținem următorul tabel simplex:

C^B	Baza	X^B	1	6	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	$\leftarrow a_3$	12	0	0	1	[5/2] ↓	-1/2
1	a_1	6	1	0	0	1/2	1/2
6	a_2	3	0	1	0	-1/2	1/2
	f_j	24	1	6	0	-5/2	7/2
		Δ_j	0	0	0	5/2*	-7/2
0	a_4	24/5	0	0	2/5	1	-1/5
1	a_1	18/5	1	0	-1/5	0	3/5
6	a_2	27/5	0	1	1/5	0	2/5
	f_j	36	5	5	1	0	3
		Δ_j	0	0	-1	0	-3

Pe linia Δ_j *din prima iterație* există un element strict pozitiv ($\Delta_4 = \frac{5}{2}$), prin urmare vom aplica în continuare algoritmul simplex primal, până la obținerea soluției optime a problemei modificate: $\widetilde{X}^o = (18/5,\ 27/5,\ 0,\ 24/5,\ 0)^t$, $\widetilde{f}_{\max} = 36$.

c) *Modificarea termenilor liberi ai restricțiilor problemei*

Vom folosi formula prin care se determină o soluție de bază X^B a sistemului de restricții corespunzătoare unei baze date B: $X^B = B^{-1} \cdot b$, unde B este matricea care are pe coloane vectorii bazei B şi B^{-1} se citeşte din ultima iterație a tabelului simplex, în dreptul vectorilor care au format baza inițială; b este vectorul termenilor liberi.

Dacă vectorul termenilor liberi b devine $\widetilde{b}$, se calculează $\widetilde{X}^B = B^{-1} \cdot \widetilde{b}$. Sunt posibile două cazuri:

1) $\widetilde{X}^B \geq 0$, în acest caz soluția optimă a problemei modificate este formată din variabilele bazice, care se pot citi din vectorul $\widetilde{X}^B$ şi din variabilele secundare, care sunt egale cu zero.

2) $\widetilde{X}^B$ are cel puțin o componentă negativă; în această situație, se alcătuieşte un tabel simplex, în care se copiază datele din ultima iterație a tabelului simplex al problemei inițiale, mai puțin coloana X^B, unde se scriu elementele date de $\widetilde{X}^B$. Se aplică în continuare algoritmul simplex dual.

c_1) $\widetilde{b} = (1,2,3)^t$

După formula $\widetilde{X}^B = B^{-1} \cdot \widetilde{b}$ avem că soluția de bază a sistemului de restricții cu termenii liberi dați de $\widetilde{b}$, corespunzătoare bazei $\{a_3, a_1, a_2\}$, este: $\widetilde{X}^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \geq 0$, deci

soluția optimă a problemei modificate este dată de:

$x_3 = \frac{9}{2}, x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_4 = x_5 = 0$, sau

$\widetilde{X}^o = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 0, 0)^t$, $\widetilde{f}_{\max} = 7 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{39}{2}$.

$c_2)\ \widetilde{b} = (5,3,1)^t$

După formula $\widetilde{X}^B = B^{-1} \cdot \widetilde{b}$ avem că soluția de bază a sistemului de restricții cu termenii liberi dați de $\widetilde{b}$, corespunzătoare bazei $\{a_3, a_1, a_2\}$, este:

$$\widetilde{X}^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

, care are și o componentă negativă; prin urmare, vom aplica în continuare algoritmul simplex dual.

C^B	Baza	X^B	7	4	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	a_3	12	0	0	1	5/2 ↓	-1/2
7	a_1	2	1	0	0	1/2	1/2
4	$\leftarrow a_2$	-1	0	1	0	[-1/2]	1/2
	f_j	10	7	4	0	3/2	11/2
		Δ_j	0	0	0	-3/2	-11/2
0	a_3	7	0	5	1	0	2
7	a_1	1	1	1	0	0	1
0	a_4	2	0	-2	0	1	-1
	f_j	7	7	7	0	0	7
		Δ_j	0	-3	0	0	-7

Obținem că soluția optimă a problemei modificate este:

$\widetilde{X}^o = (1,0,7,2,0)^t,\ \ \widetilde{f}_{\max} = 7 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 7$.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră problema de programare liniară:

$[\max] f = 5x_1 + 9x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2} \end{cases}$$

a) Să se rezolve această problemă.

b) Să se determine soluția optimă a problemei în cazul în care coeficienții funcției obiectiv devin:

$b_1)\ \tilde{c} = (2,1)$;

$b_2)\ \tilde{c} = (1,6)$.

c) Să se determine soluția optimă a problemei în cazul în care temenii liberi devin:

$c_1)\ \tilde{b} = (1,\ 2,\ 3)^t$;

$c_2)\ \tilde{b} = (5,\ 3,\ 1)^t$;

$c_3)\ \tilde{b} = (1,\ 2,\ 4)^t$.

R: *a*) $X^o = (0,\ 6)^t$, $f_{\max} = 54$;

b) $b_1)\ \tilde{X}^o = (6,\ 0)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 30$;

$b_2)\ \tilde{X}^o = (0,\ 6)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 54$;

c) $c_1)\ \tilde{X}^o = (1,\ 2)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 23$;

$c_2)\ \tilde{X}^o = (0,\ 1)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 9$;

$c_3)\ \tilde{X}^o = \left(\frac{7}{5},\ \frac{13}{5}\right)^t$, $\tilde{f}_{\max} = \frac{152}{5}$.

2. Se consideră problema de programare liniară:

$$[\min] f = 5x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,2} \end{cases}$$

a) Să se rezolve această problemă.

b) Să se determine soluția optimă a problemei în cazul în care coeficienții funcției obiectiv devin:

b_1) $\tilde{c} = (6,5)$;

b_2) $\tilde{c} = (3,8)$;

c) Să se determine soluția optimă a problemei în cazul în care temenii liberi devin:

c_1) $\tilde{b} = (4,5,6)^t$;

c_1) $\tilde{b} = (5,3,1)^t$;

c_1) $\tilde{b} = (3,2,4)^t$.

R: *a*) $X^o = (4,\ 3)^t$, $f_{\max} = 29$;

b) b_1) $\tilde{X}^o = (4,\ 3)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 39$;

b_2) $\tilde{X}^o = (0,\ 7)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 56$;

c) c_1) $\tilde{X}^o = \left(\frac{11}{2},\ \frac{1}{2}\right)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 29$;

c_2) $\tilde{X}^o = (1,\ 0)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 5$;

c_3) $\tilde{X}^o = (3,\ 1)^t$, $\tilde{f}_{\max} = 18$.

6.6. REZOLVAREA UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ PRIN MAI MULTE METODE

PROBLEME REZOLVATE

Să se rezolve următoarea problemă de programare liniară prin toate metodele cunoscute:

$$[\min] f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 24 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Rezolvare:

Metoda I. (folosind *algoritmul simplex primal*)

Forma standard de lucru a problemei este:

$$[\min] f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + My_1 + My_2 + My_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + y_1 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + y_2 = 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 + y_3 = 24 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Realizăm tabelul simplex:

C^B	Baza	X^B	5	4	6	0	0	0	M	M	M	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	
M	$\leftarrow a_7$	6	[1] ↓	2	1	-1	0	0	1	0	0	6
M	a_8	12	2	1	2	0	-1	0	0	1	0	6
M	a_9	24	3	1	2	0	0	-1	0	0	1	8
	f_j	42M	6M	4M	5M	-M	-M	-M	M	M	M	
		Δ_j	6M-5	4M-4	5M-6	-M	-M	-M	0	0	0	
5	a_1	6	1	2	1	-1 ↓	0	0	1	0	0	-
M	$\leftarrow a_8$	0	0	-3	0	[2]	-1	0	-2	1	0	0
M	a_9	6	0	-5	-1	3	0	-1	-3	0	1	2
	f_j	6M+30	5	-8M+10	-M+5	5M-5	-M	-M	-5M+5	M	M	
		Δ_j	0	-8M+6	-M-1	5M-5	-M	-M	-6M+5	0	0	
5	a_1	6	1	1/2 ↓	1	0	-1/2	0	0	1/2	0	6
0	a_4	0	0	-3/2	0	1	-1/2	0	-1	1/2	0	18
M	$\leftarrow a_9$	6	0	[-1/2]	-1	0	3/2	-1	0	-3/2	1	-
	f_j	6M+30	5	-M/2+5/2	-M+5	0	3M/2-5/2	-M	0	-3M/2+5/2	M	
		Δ_j	0	-M/2-3/2	-M-1	0	3M/2-5/2	-M	-M	-5M/2+5/2	0	
5	a_1	8	1	1/3	2/3	0	0	-1/3	0	0	1/3	
0	a_4	2	0	-5/3	-1/3	1	0	-1/3	-1	0	1/3	
0	a_5	4	0	-1/3	-2/3	0	1	-2/3	0	-1	2/3	
	f_j	40	5	5/3	10/3	0	0	-5/3	0	0	5/3	
		Δ_j	0	-7/3	-8/3	0	0	-5/3	-M	-M	5/3 -M	

Rezultă soluția optimă: $X^o = (8,0,0,2,4,0)^t$, $f_{\min} = 40$.

Metoda II.(cu ajutorul *problemei duale*)

Scriem şi rezolvăm problema duală:

$$[\max]g = 6y_1 + 12y_2 + 24y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \le 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \le 4 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \le 6 \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Forma standard de lucru a problemei duale este:

$$[\max]g = 6y_1 + 12y_2 + 24y_3 + 0y_4 + 0y_5 + 0y_6$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 = 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 4 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_6 = 6 \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Realizăm tabelul simplex pentru problema duală:

C^B	Baza	Y^B	6	12	24	0	0	0	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
0	$\leftarrow a_4$	5	1	2	$\boxed{3}\downarrow$	1	0	0	5/3
0	a_5	4	2	1	1	0	1	0	4
0	a_6	6	1	2	2	0	0	1	3
	f_j	0	0	0	0	0	0	0	
		Δ_j	6	12	24	0	0	0	
24	a_3	5/3	1/3	2/3	1	1/3	0	0	-
0	a_5	7/3	5/3	1/3	0	-1/3	1	0	0
0	a_6	8/3	1/3	2/3	0	-2/3	0	1	2
	f_j	40	8	16	24	8	0	0	
		Δ_j	-2	-4	0	-8	0	0	

Soluția optimă a problemei primale se citeşte de pe linia f_j, în dreptul vectorilor care au format baza inițială :

$X^o = (8,0,0)^t, f_{\min} = 40.$

Metoda III. (cu ajutorul *algoritmului simplex dual*)

Pentru a se putea aplica algoritmul simplex dual, este necesar să avem o soluție dual realizabilă. Pentru aceasta, va trebui să înmulțim cel puțin o restricție cu -1. Observăm că cel mai convenabil este să înmulțim toate restricțiile cu -1; astfel, cu ajutorul variabilelor de compensare, vom obține matricea identică şi algoritmul simplex va fi mai uşor de aplicat, în condițiile în care s-a obținut o soluție dual realizabilă.

$[\min]f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 \le -6 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 \le -12 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 \le -24 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Forma standard de lucru a problemei este:

$[\min]f = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -12 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 = -24 \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Realizăm tabelul algoritmului simplex dual:

C^B	Baza	X^B	5	4	6	0	0	0
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
0	a_4	-6	-1	-2	-1 ↓	1	0	0
0	a_5	-12	-2	-1	-2	0	1	0
0	← a_6	-24	[-3]	-1	-2	0	0	1
	f_j	0	0	0	0	0	0	0
		Δ_j	-5	-4	-6	0	0	0
0	a_4	2	0	-5/3	-1/3	1	0	-1/3
0	a_5	4	0	-1/3	-2/3	0	1	-2/3
5	a_1	8	1	1/3	2/3	0	0	-1/3
	f_j	40	5	5/3	10/3	0	0	-5/3
		Δ_j	0	-7/3	-8/3	0	0	-5/3

Rezultă soluția optimă: $X^o = (8,0,0,2,4,0)^t$, $f_{\min} = 40$.

PROBLEME PROPUSE

Să se rezolve următoarele probleme de programare liniară prin toate metodele cunoscute:

1. $[\max] f = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 11 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $X^o = (2,\ 3)^t$ **;** $f_{\max} = 21$.

2. $[\min] f = 5x_1 - 9x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $X^o = (3,\ 2)^t$ **;** $f_{\min} = -3$.

3. $[\max] f = 4x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $X^o = (2,\ 1)^t$ **;** $f_{\max} = 11$.

4. $[\min] f = 4x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 12 \\ -x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $X^o = (22,\ 27)^t$ **;** $f_{\min} = 61$.

5. $[\max] f = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

R: $X^o = (4,\ 4)^t$ **;** $f_{\max} = 28$.

6. $$[\min]f = 3x_1 + 8x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 3 \\ -x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
R: $X^o = (7,\ 9)^t$; $f_{\min} = -51$.

7. $$[\max]f = 7x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
R: Problema nu are soluție.

8. $$[\max]f = 3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \le 18 \\ x_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$
R: $X^o = (4,\ 6)^t$; $f_{\max} = 42$.

9. $$[\min]f = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$
R: $X^o = (2,\ 2,\ 0)^t$; $f_{\max} = 10$.

10. $$[\min]f = 6x_1 - x_2 + 5x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 - x_4 \le 1 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$
R: $X^o = (2,\ 0,\ 0,\ 2)^t$; $f_{\min} = 12$.

11. $$[\min]f = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$
R: $X^o = (8,\ 5,\ 5)^t$; $f_{\min} = 21$.

12. $$[\min]f = 4x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -1 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$
R: $X^o = (0,\ 11,\ 5)^t$; $f_{\min} = -28$.

13. $$[\max]f = 2x_1 + 8x_2 + 5x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 22 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 12 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$
R: $X^o = (3\lambda,\ 6 + 3\lambda,\ 6 - 6\lambda)^t$, $\lambda \in [0,1]$; $f_{\max} = 78$.

14. $$[\max]f = x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + 2x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$
R: $X^o = \left(0,\ 3,\ \frac{5}{2}\right)^t$; $f_{\max} = 16$.

15. $$[\min]f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 \geq -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3 \\ x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$
R: $X^o = (0,\ 4,\ 0)^t$; $f_{\min} = 8$.

6.7. PROBLEME DE TRANSPORT

PROBLEME REZOLVATE

1. Un produs trebuie transportat de la furnizorii F_1, F_2 către beneficiarii B_1, B_2, B_3. Cantitățile de care dispun cei trei furnizori, necesarul fiecărui beneficiar şi costurile unitare de transport sunt date în tabelul următor:

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	3	2	2	60
F_2	4	5	6	70
Necesar	40	50	40	

a) Să se scrie modelul matematic al problemei.

b) Să se determine planul optim de transport astfel încât costul total de transport să fie minim, pornind de la o soluție de bază obținută prin metoda colțului de nord-vest.

Rezolvare:

Observație. Fiecărui furnizor F_i îi corespunde în coloana "disponibil" cantitatea de care dispune, fiecărui beneficiar B_j îi corespunde pe linia "necesar" cantitatea de care are nevoie, iar la intersecția liniei furnizorului F_i cu coloana beneficiarului B_j se poate citi elementul C_{ij} = costul unitar de transport de la F_i către B_j. Notăm cu N suma cantităților de pe linia "necesar" şi cu D suma cantităților din coloana "disponibil".

a) Notăm cu x_{ij} cantitatea ce trebuie transportată de la furnizorul "i" către beneficiarul "j", unde $i=\overline{1,2}$, $j=\overline{1,3}$ şi cu f costul total de transport. Observăm că $N=D$, deci problema

este echilibrată. Modelul matematic al problemei de transport este:

$$[\min] f(x) = 3x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + 5x_{22} + 6x_{23}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 60 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 70 \\ x_{11} + x_{21} = 40 \\ x_{12} + x_{22} = 50 \\ x_{13} + x_{23} = 40 \\ x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,3} \end{cases}$$

b) *Etapa I. Se verifică dacă problema este echilibrată* ($N = D$); deoarece $N = D = 130$, rezultă că această condiție este îndeplinită.

Etapa II. Se determină o soluție de bază, notată X_0.

Vom folosi metoda colțului de nord-vest.

1) Fie NV căsuța situată în colțul de nord-vest al tabelului X_0. În NV se transportă o cantitate egală cu minimul dintre necesarul şi disponibilul corespunzătoare acestei căsuțe (în NV se scrie valoarea min{40,60}=40).

2) Se scade această valoare din disponibilul şi necesarul corespunzător căsuței NV. Dacă s-a epuizat necesarul, se completează cu “-“ căsuțele de pe coloana pe care se află NV, iar dacă s-a epuizat disponibilul se completează cu “-“ căsuțele de pe linia pe care se află NV.

3) Se reiau paşii 1), 2) pentru matricea rămasă necompletată. Obținem soluția X_0:

40	20	-
-	30	40

Etapa III. Se verifică dacă soluția obținută este:

1) *nedegenerată* (dacă are $m + n - 1$ componente nenule, unde m reprezintă numărul de furnizori, iar n reprezintă numărul de beneficiari);

2) *optimă* (dacă $\Delta_{ij} \le 0, (\forall) i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$).

1) Se observă că soluția X_0 este nedegenerată.

2) Pentru testarea optimalității, introducem variabilele u_i, $i = \overline{1,2}$ şi v_j, $j = \overline{1,3}$, cu proprietatea că $u_i + v_j = C_{ij}$, unde C_{ij} sunt costurile unitare de transport din căsuțele bazice (căsuțele corespunzătoare componentelor nenule ale soluției).

2.1) Pentru determinarea variabilelor u_i şi v_j vom folosi următorul tabel, în care am copiat costurile C_{ij} din căsuțele nebazice şi am dat uneia dintre variabile valoarea zero ($u_1 = 0$):

	$v_1 =$	$v_2 =$	$v_3 =$
u_1=0	3	2	
u_2=		5	6

Din condiția $u_i + v_j = C_{ij}$, $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,3}$, obținem:

$$\left.\begin{matrix} u_1 + v_1 = 3 \\ u_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_1 = 3; \quad \left.\begin{matrix} u_1 + v_2 = 2 \\ u_1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_2 = 2;$$

$$\left.\begin{matrix} u_2 + v_2 = 5 \\ v_2 = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_2 = 3. \quad \left.\begin{matrix} u_2 + v_3 = 6 \\ u_2 = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_3 = 3.$$

2.2) Pentru variabilele u_i şi v_j găsite calculăm $\overline{C_{ij}} = u_i + v_j$, $\forall i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,3}$ şi le scriem în următorul tabel:

	v_1=3	v_2=2	v_3=3
u_1=0	3	2	3
u_2=3	6	5	6

2.3) Determinăm apoi $\Delta_{ij} = \overline{C_{ij}} - C_{ij}, \forall i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3}$ şi verificăm criteriul de optim.

Toate calculele din etapa $III.2)$ se pot sintetiza în următorul tabel:

X_0				v_1=3	v_2=2	v_3=3	$\Delta_{ij} = \overline{C_{ij}} - C_{ij}$		
- 40	+ 20		u_1=0	3	2	3	0	0	1
Θ +	30 -	40	u_2=3	6	5	6	2	0	0

Etapa IV. Se observă că există valori $\Delta_{ij} > 0$, prin urmare soluția nu este optimă.

Se alege cea mai mare dintre diferențele $\Delta_{ij} > 0$ (în cazul acesta, Δ_{21}) şi în căsuța corespunzătoare acesteia (x_{21}) se scrie θ. Se formează un circuit ce pleacă din θ şi revine în θ, care merge în unghi drept şi are colțurile nenule. În colțurile circuitului se scriu alternativ semnele "+" , "-", începând cu "+" de la θ. Se alege $\theta =$minimul căsuțelor marcate cu "-": $\theta = \min\{40, 30\} = 30$. Cu $\theta = 30$ se determină o nouă soluție de bază X_1 , adunând θ la căsuțele marcate cu "+" şi scăzând θ la cele marcate cu "-".

Vor rezulta următoarele iterații:

X_1				v_1=3	v_2=2	v_3=5	$\Delta_{ij} = \overline{C_{ij}} - C_{ij}$		
- 10	50	+ Θ	u_1=0	3	2	5	0	0	3
30 +		40 -	u_2=1	4	3	6	0	-2	0

X_2				v_1=0	v_2=2	v_3=2	$\Delta_{ij} = \overline{C_{ij}} - C_{ij}$		
	- 50	+ 10	u_1=0	0	2	2	-3	0	0
40	Θ +	30 -	u_2=4	4	6	6	0	1	0

X_3				v_1=1	v_2=2	v_3=2	$\Delta_{ij} = \overline{C_{ij}} - C_{ij}$		
	20	40	u_1=0	1	2	2	-2	0	0
40	30		u_2=3	4	5	5	0	0	-1

Deoarece criteriul de optim se verifică $\left(\Delta_{ij} \le 0,\ \forall i = \overline{1,2},\ \forall j = \overline{1,3}\right)$, rezultă că soluția găsită în ultima iterație este optimă.

Observăm că *toate diferențele* $\Delta_{ij} = 0$ *corespund unor variabile bazice, deci soluția optimă este unică*. Am obținut X^{O}:

	20	40
40	30	

sau: $x_{11} = 0, x_{12} = 20, x_{13} = 40, x_{21} = 40, x_{22} = 30, x_{23} = 0.$

Costul total minim de transport este:

$$f_{\min} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} C_{ij} x_{ij} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 5 \cdot 30 + 6 \cdot 0 = 430 \ u.m.$$

2. Să se rezolve problema de transport:

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	4	1	3	60
F_2	2	5	6	40
F_3	1	7	4	100
Necesar	70	80	50	

Rezolvare:

Etapa 1. Se observă că problema este echilibrată.

Etapa II. Determinăm o soluție inițială de bază.

Observație. În cazul în care nu se specifică folosirea unei anumite metode pentru aflarea unei soluții inițiale de bază, este mai bine să determinăm câte o soluție prin mai multe metode şi să o alegem pe aceea care are costul total de transport minim.

a) *Prin metoda colțului de nord-vest* rezultă soluția X_0:

60	-	-
10	30	-
-	50	50

$f_0 = 960 \quad u.m.$

b) *Metoda costului minim pe linie*

1) Fie ML căsuța de pe prima linie căreia îi corespunde cel mai mic cost. În ML se transportă o cantitate egală cu minimul dintre necesarul și disponibilul corespunzătoare acestei căsuțe (vom obține astfel $x_{11} = 60$).

2) Se scade această valoare din disponibilul şi necesarul corespunzător căsuței ML. Dacă s-a epuizat necesarul, se completează cu "-" căsuțele de pe coloana pe care se află ML, iar dacă s-a epuizat disponibilul se completează cu "-" căsuțele de pe linia pe care se află ML.

3) Se reiau paşii 1), 2) pentru matricea rămasă necompletată.

Rezultă soluția X_1:

-	60	-
40	-	-
30	20	50

$f_1 = 510 \ u.m.$

c) *Metoda costului minim pe coloană* obținem:

1) Fie MC căsuța de pe prima linie căreia îi corespunde cel mai mic cost. În MC se transportă o cantitate egală cu minimul dintre necesarul şi disponibilul corespunzătoare acestei căsuțe (vom obține astfel $x_{31} = 70$).

2) Se scade această valoare din disponibilul şi necesarul corespunzător căsuței MC. Dacă s-a epuizat necesarul, se completează cu "-" căsuțele de pe coloana pe care se află MC, iar dacă s-a epuizat disponibilul se completează cu "-" căsuțele de pe linia pe care se află MC.

3) Se reiau paşii 1), 2) pentru matricea rămasă necompletată.

Rezultă soluția X_2:

-	60	-
-	20	20
70	-	30

$f_2 = 470 \ u.m.$

d) *Metoda costului minim în tabel*:

1) Fie MT căsuţa de pe prima linie căreia îi corespunde cel mai mic cost. În MT se transportă o cantitate egală cu minimul dintre necesarul şi disponibilul corespunzătoare acestei căsuţe (vom obţine astfel $x_{12} = 60$).

2) Se scade această valoare din disponibilul şi necesarul corespunzător căsuţei MT. Dacă s-a epuizat necesarul, se completează cu "-" căsuţele de pe coloana pe care se află MT, iar dacă s-a epuizat disponibilul se completează cu "-" căsuţele de pe linia pe care se află MT.

3) Se reiau paşii 1), 2) pentru matricea rămasă necompletată.

Rezultă soluţia X_3:

-	60	-
-	20	20
70	-	30

$f_3 = 470 \quad u.m.$

Alegem drept soluţie iniţială de bază pe aceea care are costul de transport minim, adică pe X_2 (care coincide cu X_3).

Etapa III. Soluţia aleasă este nedegenerată, rămâne să verificăm optimalitatea.

X_0				v_1=-1	v_2=1	v_3=2	$\Delta_{ij} = \overline{C_{ij}} - C_{ij}$		
	60		u_1=0	-1	1	2	-5	0	-1
+ Θ	20	- 20	u_2=4	3	5	6	1	0	0
70 -		30 +	u_3=2	1	3	4	0	-4	0

Etapa IV.

X_1				v_1=-2	v_2=1	v_3=1	$\Delta_{ij} = \overline{C_{ij}} - C_{ij}$		
	60		u_1=0	-2	1	1	-6	0	-2
20	20		u_2=4	2	5	5	0	0	-1
50		50	u_3=3	1	4	4	0	-3	0

Problema are soluție unică. Soluția optimă este X^O:

	60	
20	20	
50		50

Costul minim de transport este: $f_{\min} = 450$ u.m.

3. Să se rezolve problema de transport:

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	1	3	2	42
F_2	2	1	3	30
Necesar	24	12	36	

Rezolvare:

Etapa 1. Se observă că problema este echilibrată.

Etapa II. Determinăm o soluție inițială de bază.

a) Prin *metoda colțului de nord-vest* rezultă soluția X_0:

24	12	6
-	-	30

$f_0 = 162 \quad u.m.$

b) Prin *metoda costului minim pe linie* obținem soluția X_1:

24	-	18
-	12	18

$f_1 = 126 \quad u.m.$

Soluțiile obținute prin metoda costului minim pe coloană şi în tabel coincid cu X_1.

Vom alege X_1 drept soluție inițială de bază.

Etapa III. Această soluție este nedegenerată; verificăm optimalitatea.

X_1				$v_1=1$	$v_2=0$	$v_3=2$	$\Delta_{ij}=\overline{C_{ij}}-C_{ij}$		
- 24		+ 18	$u_1=0$	1	0	2	0	-3	0
Θ +	12	18 -	$u_2=1$	2	1	3	0	0	0

Observăm că $\Delta_{21} = 0$, dar x_{21} nu este variabilă bazică, deci *problema are optim multiplu*. Vom determina o nouă soluție, scriind θ în căsuța x_{21}. Rezultă $\theta = 18$ şi o nouă soluție X_2 :

6		36
18	12	

Soluția optimă sub formă generală este:

$X^O = \lambda X^1 + (1-\lambda)X^2, \lambda \in [0,1],$

4. Să se rezolve problema de transport:

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	5	1	3	30
F_2	2	6	4	80
Necesar	40	50	60	

Rezolvare:

Etapa I. Problema este neechilibrată $(D < N)$.

Pentru echilibrare se introduce un furnizor fictiv, având disponibilul egal cu $N - D = 40$ şi costurile unitare de transport nule. Obținem problema:

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	5	1	3	30
F_2	2	6	4	80
F_3	0	0	0	40
Necesar	40	50	60	

Etapa II. Determinăm câte o soluție inițială de bază prin cele patru metode.

a) Prin *metoda colțului de nord-vest* rezultă soluția X_0 :

30	-	-
10	50	20
-	-	60

$f_0 = 550 \quad u.m.$

b) Prin *metoda costului minim pe linie* rezultă soluția X_1 :

-	30	-
40	-	40
-	20	20

$f_1 = 270 \quad u.m.$

c) Prin *metoda costului minim pe coloană* găsim soluția X_2 :

-	30	-
40	20	20
-	-	40

$f_2 = 310 \quad u.m.$

d) Prin *metoda costului minim în tabel* obținem soluția X_3 :

-	60	-
-	20	20
70	-	30

$f_3 = 470 \quad u.m.$

Alegem X_1 drept soluție inițială de bază.

Etapa III. Această soluție este nedegenerată, rămâne să verificăm optimalitatea.

X_1				v_1=-1	v_2=1	v_3=1	$\Delta_{ij} = \overline{C_{ij}} - C_{ij}$		
-	30	-	u_1=0	-1	1	1	-6	0	-2
40	-	40	u_2=3	2	4	4	0	-2	0
-	20	20	u_3=-1	-2	0	0	-2	0	0

Problema are soluție unică. Soluția optimă este X^O :

-	30	-
40	-	40
-	20	20

Costul total minim de transport este $f_{\min} = 270\, u.m.$

5. Să se rezolve următoarea problemă de transport, pornind de la o soluție de bază obținută prin metoda costului minim pe linie:

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	7	3	6	24
F_2	5	6	4	30
Necesar	12	24	18	

Rezolvare:

Etapa 1. Se observă că problema este echilibrată.

Etapa II. Determinăm o soluție inițială de bază prin metoda costului minim pe linie şi obținem soluția X_0 :

-	24	-
12	-	18

Etapa III. Observăm că soluția obținută este degenerată (are numai 3 componente nenule, în loc de 4).

Deoarece *degenerarea soluției* s-a produs *în faza inițială*, vom modifica problema astfel: adăugăm la fiecare cantitate din coloana "disponibil" o valoare ε, iar la ultima cantitate de pe linia "necesar" valoarea $m \cdot \varepsilon$, unde m reprezintă numărul de furnizori, iar ε este un număr pozitiv foarte mic, $\varepsilon \to 0$. După ce algoritmul a luat sfârşit, înlocuim ε cu zero şi apoi citim soluția optimă a problemei.

Astfel obținem problema modificată:

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	7	3	6	24+ε
F_2	5	4	6	30+ε
Necesar	12	24	18+2ε	

Soluția obținută prin metoda costului minim pe linie este X_0 :

-	24	ε
12	-	18+ε

Aceasta este nedegenerată; verificăm optimalitatea.

X_1				$v_1=5$	$v_2=3$	$v_3=6$	$\Delta_{ij}=\overline{C_{ij}}-C_{ij}$		
-	24	ε	$u_1=0$	5	3	6	-2	0	0
12	-	18+ε	$u_2=0$	5	3	6	0	-1	0

Rezultă că problema are soluție optimă unică, degenerată, X^O:

	24	
12		18

Costul total minim de transport este:

$f_{\min} = 3\cdot 24 + 5\cdot 12 + 6\cdot 18 = 240\ u.m.$

6. Să se rezolve următoarea problemă de transport, pornind de la o soluție de bază obținută prin metoda costului minim pe coloană:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Disponibil
F_1	3	5	5	9	30
F_2	4	4	7	7	60
F_3	2	6	7	5	50
F_4	5	6	6	8	90
Necesar	20	70	70	70	

Rezolvare:

Etapa I. Avem $D = N = 230\ u.m.$, deci problema este echilibrată.

Etapa II. Determinăm o soluție de bază prin metoda costului minim pe coloană şi obținem X_0:

-	10	20	-
-	60	-	-
20	-	-	30
-	-	50	40

Etapa III. *a*) X_0 are $4+4-1$ componente nenule, deci este nedegenerată.

b) Testăm optimalitatea soluției:

X_0					$v_1=4$	$v_2=5$	$v_3=5$	$v_4=7$	$\Delta_{ij}=\overline{C_{ij}}-C_{ij}$			
+ Θ	10	- 20		$u_1=0$	4	5	5	7	1	0	0	-2
	60			$u_2=-1$	3	4	4	6	-1	0	-3	-1
- 20			+ 30	$u_3=-2$	2	3	3	5	0	-3	-4	0
		50 +	40 -	$u_4=1$	5	6	6	8	0	0	0	0

Se observă că $\Delta_{11}>0$, prin urmare soluția nu este optimă.

Etapa IV. În căsuța x_{11} adăugăm θ. Alegem $\theta=\min\{20,40,20\}=20$. Cu $\theta=20$ găsim o nouă soluție de bază X_1:

20	10		
	60		
			50
		70	20

a) Observăm că această soluție este degenerată.
Deoarece *degenerarea soluției* s-a produs *pe parcurs* , vom scrie ε într-una din căsuțele eliberate în etapa precedentă (x_{13} sau x_{31}). Vom obține o soluție nedegenerată X_2:

20	10	ε	
	60		
			50
		70	20

b) Verificăm optimalitatea acestei soluții:

X_2					$v_1=3$	$v_2=5$	$v_3=5$	$v_4=7$	$\Delta_{ij}=\overline{C_{ij}}-C_{ij}$			
20	10	ε		$u_1=0$	3	5	5	7	0	0	0	-2
	60			$u_2=-1$	2	4	4	6	-2	0	-3	-1
			50	$u_3=-2$	1	3	3	5	-1	-3	-4	0
		70	20	$u_4=1$	4	6	6	8	-1	0	0	0

Criteriul de optim este îndeplinit. Luăm $\varepsilon = 0$ şi rezultă soluția optimă X^O:

20	10		
	60		
			50
		70	20

Costul total minim de transport este:

$$f_{\min} = 20 \cdot 3 + 10 \cdot 5 + 60 \cdot 4 + 50 \cdot 5 + 70 \cdot 6 + 20 \cdot 8 = 1480\ u.m.$$

PROBLEME PROPUSE

Să se scrie modelul matematic şi să se determine planul optim de transport pentru următoarele probleme, astfel încât costul total de transport sa fie minim:

1.

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	4	3	3	80
F_2	5	6	7	80
Necesar	50	60	50	

R: X^O:

	30	50
50	30	

$f_{\min} = 670\, u.m.$

2.

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	4	6	3	50
F_2	7	5	1	80
F_3	1	2	4	70
Necesar	100	40	60	

R: X^o:

50		
	20	60
50	20	

$f_{\min} = 450\,u.m.$

3.

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	6	8	3	60
F_2	4	5	1	40
F_3	2	7	9	100
Necesar	70	80	50	

R: X^o:

	10	50
	40	
70	30	

$f_{\min} = 780\,u.m.$

4.

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	4	1	3	60
F_2	2	5	6	40
F_3	1	7	4	100
Necesar	70	20	50	

R: X^o:

	20	40	
			40
70		10	20

$f_{\min} = 250\,u.m.$

5.

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	5	2	4	8
F_2	3	6	7	6
F_3	2	8	5	12
Necesar	9	10	7	

R: X^o:

	8	
	2	4
9		3

$f_{\min} = 89\, u.m.$

6.

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	3	8	3	60
F_2	4	5	6	40
F_3	9	7	4	60
Necesar	60	80	50	

X^o:

60		
	40	
	10	50
	30	

$f_{\min} = 650\, u.m.$

7.

	B_1	B_2	B_3	Disponibil
F_1	5	2	6	40
F_2	1	4	3	60
F_3	7	1	4	100
Necesar	80	70	50	

R: X^o:

20	20	
60		
	50	50

$f_{\min} = 450\,u.m.$

8.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Disponibil
F_1	2	4	4	7	20
F_2	3	3	6	6	50
F_3	1	5	6	4	40
F_4	4	5	5	7	80
Necesar	10	60	60	60	

R: X^o:

10	10λ	$10-10\lambda$	
	50		
			40
	$10-10\lambda$	$50+10\lambda$	20

$\lambda \in [0,\ 1];\ f_{\min} = 810\,u.m.$

9.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Disponibil
F_1	7	3	5	8	30
F_2	1	4	6	7	60
F_3	2	6	1	5	50
F_4	5	9	7	4	80
Necesar	30	55	70	60	

R: X^o:

	$25+5\lambda$	$5-5\lambda$		
30	$30-5\lambda$	5λ		
		50		
		15	60	5

$\lambda \in [0,\ 1];\ f_{\min} = 645\,u.m.$

10.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Disponibil
F_1	1	4	5	9	20
F_2	4	2	7	7	55
F_3	2	5	3	5	40
F_4	4	6	6	8	90
Necesar	90	70	65	70	

R: X^o:

20			
	55		
		40	
70	15λ	$20-15\lambda$	
	$15-15\lambda$	$5+15\lambda$	70

$\lambda \in [0, 1]$; $f_{\min} = 650\, u.m.$

11.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Disponibil
F_1	6	5	4	9	35
F_2	4	3	7	5	50
F_3	2	6	7	5	55
F_4	4	6	3	8	70
Necesar	25	70	90	85	

R: X^o:

	15	20	
	50		
25			30
		70	
	5		55

$f_{\min} = 715\, u.m.$

12.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Disponibil
F_1	3	2	6	5	80
F_2	8	4	2	7	35
F_3	5	6	7	6	50
F_4	1	6	4	3	20
Necesar	20	40	95	60	

13.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Disponibil
F_1	2	6	5	9	30
F_2	4	4	7	4	55
F_3	2	6	1	5	70
F_4	3	2	6	8	90
Necesar	35	65	70	80	

CAPITOLUL7
SERII

7.1. SERII DE NUMERE REALE

BREVIAR TEORETIC

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o serie numerică de termen general a_n. Definim *şirul sumelor parțiale* $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Pentru a stabili natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se pot folosi:

Definiția 1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *convergentă* dacă şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

În acest caz, numărul $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ se numeşte *suma seriei*.

Dacă $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ sau şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ nu are limită, spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *divergentă*.

Criteriul suficient de divergență. Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Criterii pentru serii cu termeni pozitivi

Criteriul 1 de comparație. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termeni pozitivi pentru care există $n_0 \in N$ astfel încât $a_n \leq b_n, (\forall) n \geq n_0$.

$a)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul 2 de comparație. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termeni pozitivi pentru care există $n_0 \in N$ astfel încât $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, (\forall) n \geq n_0$.

$a)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

Criteriul 3 de comparație. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serii cu termeni pozitivi.

$a)$ Dacă $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, \infty)$, atunci seriile au aceeaşi natură.

$b)$ Dacă $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ şi:

$b_1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă;

$b_2)$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

$c)$ Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ şi:

$c_1)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ este convergentă;

$c_2)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului raportului (d'Alembert).

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$a)$ Dacă $l<1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $l>1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului rădăcinii (Cauchy).

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

$a)$ Dacă $l<1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă.

$b)$ Dacă $l>1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

Corolarul criteriului Raabe-Duhamel.

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $l=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$.

$a)$ Dacă $l<1$, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este divergentă.

$b)$ Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Criteriu pentru serii alternate

Criteriul lui Leibniz.

Fie seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$. Dacă : $a)$ şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător şi $b)$ $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ este convergentă.

Propoziția 1. $a)$ Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă şi are suma S, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n$ este convergentă şi are suma $\alpha \cdot S$.

$b)$ Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente şi au sumele S_1 şi S_2, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ este convergentă şi are suma $S_1 + S_2$.

Definiția 2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă.

Propoziția 2. Dacă o serie este absolut convergentă, atunci este şi convergentă.

PROBLEME REZOLVATE

Să se stabilească natura următoarelor serii de numere reale şi, dacă este posibil, să se determine suma acestora.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha+1}}, \alpha > 0.$

Rezolvare:
Considerăm şirul sumelor parţiale:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+\alpha}+\sqrt{k+\alpha+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+\alpha}-\sqrt{k+\alpha+1}}{-1} =$$

$$= -\sqrt{1+\alpha}+\sqrt{2+\alpha}-\sqrt{2+\alpha}+\sqrt{3+\alpha}-\ldots-\sqrt{n+\alpha}+\sqrt{n+\alpha+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow S_n = \sqrt{n=\alpha+1}-\sqrt{1+\alpha} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, deci şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este divergent, prin urmare, conform definiției, seria este divergentă.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Rezolvare:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$, deci seria este convergentă şi are suma $S = \frac{1}{2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3n-1}{3n+2}$.

Rezolvare:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{3k-1}{3k+2} = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(3k-1) - \ln(3k+2)\right] =$$
$$= \ln 2 - \ln 5 + \ln 5 - \ln 8 + \ldots + \ln(3n-1) - \ln(3n+2) =$$
$= \ln 2 - \ln(3n+2) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$, prin urmare seria este divergentă.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in R$. (seria geometrică).

Rezolvare:

Avem $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$

Pentru $q \in (-1,1)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, deci seria este convergentă şi are suma $\frac{1}{1-q}$.

Pentru $q \in [1,\infty)$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, deci seria este divergentă.

Pentru $q \in (-\infty,-1]$, nu există $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (în acest caz, se spune că seria este oscilantă), deci seria este divergentă.

În concluzie, seria geometrică este convergentă dacă şi numai dacă $q \in (-1,1)$ şi are suma $S = \frac{1}{1-q}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in R$ (*seria armonică generalizată sau seria Riemann*)

Rezolvare:

- Pentru $\alpha = 1$ obținem seria armonică, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Avem că:

$$S_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)>$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots..+\frac{1}{2}\Rightarrow S_{2^n}>1+\frac{n}{2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2^n}=\infty$$, prin urmare seria este divergentă.

- Pentru $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$; seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă, deci, în baza criteriului 1 de comparație, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ este divergentă.

- Pentru $\alpha > 1$, avem că

$$S_{2^n-1} = 1+\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}\right)+\left(\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5^{\alpha}}+\frac{1}{6^{\alpha}}+\frac{1}{7^{\alpha}}\right)+\ldots..+$$

$$+\left(\frac{1}{\left(2^{n-1}\right)^{\alpha}}+\frac{1}{\left(2^{n-1}+1\right)^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{\left(2^{n}-1\right)^{\alpha}}\right)\leq 1+\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\left(2^{n-1}\right)^{\alpha}}+\frac{1}{\left(2^{n-1}\right)^{\alpha}}+\ldots.+\frac{1}{\left(2^{n-1}\right)^{\alpha}}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^2}+\ldots.+\frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}\leq\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$$, prin urmare

şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ este mărginit; fiind şi crescător, rezultă că este convergent şi deci seria este convergentă.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{3^{n+1} + 8^{n+1}}$.

Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n\left(\left(\frac{3}{8}\right)^n + 1\right)}{8^{n+1}\left(\left(\frac{3}{8}\right)^{n+1} + 1\right)} = \frac{1}{8} \neq 0$$; conform criteriului suficient de divergență, rezultă că seria este divergentă.

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Rezolvare:

Avem că $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}, \forall n \geq 2;$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, deci, în baza criteriului 1 de comparație, rezultă că seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ este divergentă.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^n}$.

Rezolvare:

Avem că $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$;

cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă , rezultă, folosind criteriul 2 de comparație, că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! e^n}$ este divergentă.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{4n^2-1}$.

Rezolvare:

Se compară cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; fie $a_n = \frac{3n+5}{4n^2-1}$ şi $b_n = \frac{1}{n}$;

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{4n^2-1} = \frac{3}{4} \in (0,\infty)$; de aici rezultă, conform criteriului 3 de comparaţie, că seriile au aceeaşi natură; cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{4n^2-1}$ este divergentă.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5-3n^2+1}+n+2}{7n^3-2n^2+1}$.

Rezolvare:

Se compară cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{5}{3}}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\frac{5}{3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$; fie

$a_n = \frac{\sqrt[3]{2n^5-3n^2+1}+n+2}{7n^3-2n^2+1}$ şi $b_n = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[3]{2}}{7} \in (0,\infty)$; de aici rezultă, conform criteriului 3 de comparaţie, că seriile au aceeaşi natură; cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ este convergentă (este seria armonică generalizată cu $\alpha = \frac{4}{3} > 1$), rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^5-3n^2+1}+n+2}{7n^3-2n^2+1}$ este convergentă.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$.

Rezolvare:

Se compară cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; fie $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ şi $b_n = \frac{1}{n^3}$;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow$$ conform criteriului 3 de comparaţie, că seriile au aceeaşi natură; cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ este convergentă, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ este convergentă.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.4.7.....(3n-2)}{3.7.10....(4n-1)}$.

Rezolvare:

Vom folosi corolarul criteriului raportului. Avem că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1.4.7.....(3n-2).(3n+1)}{3.7.10....(4n-1).(4n+3)}}{\frac{1.4.7.....(3n-2)}{3.7.10....(4n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)}{(4n+3)} = \frac{3}{4} < 1,$$

prin urmare seria este convergentă.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n(\sqrt[n]{a}-1)\right)^n$, $a>1$.

Rezolvare:
Aplicăm corolarul criteriului rădăcinii:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \ln a .$$

- Dacă $\ln a < 1 \Leftrightarrow a < e$, atunci seria este convergentă.
- Dacă $\ln a > 1 \Leftrightarrow a > e$, atunci seria este divergentă.
- Pentru $a = e$, seria devine: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n(\sqrt[n]{e}-1)\right)^n$.

Încercăm să aplicăm criteriul suficient de divergență. Vom calcula

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n(\sqrt[n]{e}-1)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+n(\sqrt[n]{e}-1)-1\right)^n =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(n(\sqrt[n]{e}-1)-1\right)} = e^L ;$$

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(n(\sqrt[n]{e}-1)-1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} .$$

Avem că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x} = \dfrac{1}{2}$, aşadar

$\forall\ (x_n\}_{n\geq 1}, x_n \to 0$, rezultă că $\lim\limits_{x_n\to 0}\dfrac{e^{x_n}-1-x_n}{x_n^2} = \dfrac{1}{2}$; în

particular, pentru $x_n = \dfrac{1}{n}$ obținem că $L = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$,

deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^L = e^{\frac{1}{2}} \neq 0$, prin urmare, conform criteriului

suficient de divergență, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n(\sqrt[n]{e}-1)\right)^n$ este divergentă.

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n^2+1}$.

Rezolvare:

Aplicăm corolarul criteriului rădăcinii:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}=$$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{3}{3n+2}\cdot\frac{n^2+1}{n}}=\frac{1}{e}<1$, prin urmare seria este convergentă.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2.5.8.....(3n-1)}{3.6.9....(3n)}\right]^2$

Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{2.5.8.....(3n-1)(3n+2)}{3.6.9......(3n)(3n+3)}\right]^2}{\left[\frac{2.5.8.....(3n-1)}{3.6.9....(3n)}\right]^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(3n+2)}{(3n+3)}\right]^2=1$$, deci

criteriul raportului este neconcludent.

Folosind corolarul criteriului Raabe-Duhamel obținem:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{(3n+3)^2}{(3n+2)^2}-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{6n+5}{(3n+2)^2}=\frac{2}{3}<1,$$

deci seria este divergentă.

Să se studieze convergența şi absolut convergența seriilor:

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{2n^2}$.

Rezolvare:

- Studiem convergența. Notăm $a_n = \dfrac{3n-1}{2n^2}$;]

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+2}{2(n+1)^2} - \frac{3n-1}{2n^2} = \frac{-5n^2-5n-1}{n(n+1)\cdot 2^{n+1}} < 0$$, deci şirul

$(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător; cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ rezultă, în baza criteriului lui Leibniz, că seria este convergentă.

- Studiem absolut convergența; pentru aceasta, vom considera seria modulelor:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-1}{2n^2}$; comparăm cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{3}{2} \in (0,\infty)$ şi rezultă că seriile au aceeaşi natură (criteriul 3 de comparație), prin urmare seria modulelor este divergentă, deci seria alternată $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3n-1}{2n^2}\right)$ nu este absolut convergentă.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n\cdot 2^n}$.

Rezolvare:

Studiem absolut convergența; pentru aceasta, vom considera seria modulelor:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot 2^n}$; aplicând corolarul criteriului raportului, obținem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$, prin urmare seria

modulelor este convergentă, deci seria alternată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n\cdot 2^n}$

este absolut convergentă. Conform propoziției 2 din breviarul teoretic, rezultă că seria este şi convergentă.

Să se arate că următoarele serii sunt convergente şi să se calculeze sumele acestora:

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

generalizare: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)...(n+p)}$, $p \in N^*$.

Rezolvare:

Considerăm şirul sumelor parțiale,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{4}$$, prin urmare seria este

convergentă şi are suma $S = \frac{1}{4}$.

Generalizare:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)....(k+p)} =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k(k+1)...(k+p-1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)...(k+p)} \right] =$$

$$\frac{1}{p} \left[\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot p} - \frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+p)} \right] \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{p \cdot p!}$$, prin

urmare seria este convergentă şi are suma $S = \frac{1}{p \cdot p!}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

Rezolvare:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] =$$

$$= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = 1,$$

deci seria este convergentă şi suma seriei este $S = 1$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{n^3 + 5n^2 + 4n}$.

Rezolvare:

Avem: $\frac{k-5}{k^3 + 5k^2 + 4k} = \frac{k-5}{k(k+1)(k+4)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} + \frac{C}{k+4}$; aducem la acelaşi numitor şi după identificare obţinem sistemul:

$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 5A + 4B + C = 1 \\ 4A = -5 \end{cases}$, cu soluţia $A = -\frac{5}{4}$, $B = 2$, $C = -\frac{3}{4}$. Prin urmare,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+2}{k^3 + 6k^2 + 8k} = \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{5}{4k} + \frac{2}{k+1} - \frac{3}{4(k+4)} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{5}{4k} + \frac{5}{4(k+1)} + \frac{3}{4(k+4)} - \frac{3}{4(k+4)} \right] = -\frac{5}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4} \right) =$$

$$= -\frac{5}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{3}{4} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} \right) \right] =$$

$$= -\frac{5}{4} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right)$$; rezultă că

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{31}{30} = -\frac{19}{40}$, deci seria este convergentă şi are suma $S = -\frac{19}{40}$.

21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+3} + 2^{2n+1}}{7^{n+2}}$.

Rezolvare:

Considerăm seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{7}\right)^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n$, care sunt serii geometrice de rații $q \in (-1,1)$, deci convergente şi au sumele:

$S_1 = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{7}\right)} = \frac{7}{10}$ şi $S_2 = \frac{1}{1-\frac{4}{7}} = \frac{7}{3}$.

Conform propoziției 1 din breviarul teoretic, rezultă că seria

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-3)^3}{7^2}\left(-\frac{3}{7}\right)^n + \frac{2}{7^2}\left(\frac{4}{7}\right)^n\right]$ este convergentă şi are suma

$$S = -\frac{27}{49} \cdot S_1 + \frac{7}{3} \cdot S_2 = -\frac{27}{49} \cdot \frac{7}{10} + \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{3187}{630}.$$

Am obținut că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+3} + 2^{2n+1}}{7^{n+2}} = \frac{3187}{630}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 2n + 4}{3^n}$.

Rezolvare:

Considerăm seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ este o serie geometrică de rație $q=\frac{1}{3}$, deci este convergentă şi are suma $S_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$.

Pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ vom scrie şirul sumelor parțiale:

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}$; avem că:

$S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}$; înmulțim această egalitate cu $\left(-\frac{1}{3}\right)$:

$-\frac{1}{3}S_n=-\frac{1}{3^2}-\frac{2}{3^3}-...-\frac{n-1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}$, apoi adunăm cele două relații şi va rezulta:

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}\Rightarrow$$

$\Rightarrow S_n=\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]-\frac{n}{2\cdot 3^n}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ este convergentă şi are suma $S_2=\frac{3}{4}$.

Pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ vom scrie şirul sumelor parțiale:

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3^k}$; avem că

$T_n=\frac{1^2}{3^1}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}+...+\frac{n^2}{3^n}$; înmulțim această egalitate cu $\left(-\frac{1}{3}\right)$:

$$-\frac{1}{3}T_n=-\frac{1^2}{3^2}-\frac{2^2}{3^3}-\ldots-\frac{(n-1)^2}{3^n}-\frac{n^2}{3^{n+1}},$$ apoi adunăm cele două relații și rezultă:

$$\frac{2}{3}T_n=\frac{1^2}{3^1}+\frac{2^2-1^2}{3^2}+\frac{3^2-2^2}{3^3}+\ldots+\frac{n^2-(n-1)^2}{3^n}-\frac{n^2}{3^{n+1}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-(k-1)^2}{3^k}-\frac{n^2}{3^{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{3^k}-\frac{n^2}{3^{n+1}}=$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}-\frac{n^2}{3^{n+1}}=2S_n-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n^2}{3^{n+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{3}{2}\left(2\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2},$$ prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$ este convergentă și suma ei este $S_3=\frac{3}{2}$.

Așadar, conform propoziției 1 din breviarul teoretic, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+2n+4}{3^n}$ este convergentă și are suma

$$4\cdot S_1+2\cdot S_2+5\cdot S_3=4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{4}+5\cdot\frac{3}{2}=11.$$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}\sin\frac{n\pi}{2}$.

Rezolvare:

Seria dată se mai poate scrie: $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}+\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^5}-\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^7}+\ldots$, care este o serie geometrică având primul termen $\frac{1}{\sqrt{2}}$ și rația $-\frac{1}{2}$, prin

urmare seria este convergentă şi are suma $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

PROBLEME PROPUSE

Stabiliţi natura următoarelor serii de numere reale şi atunci când este posibil determinaţi suma acestora:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}$ **R:** Seria este divergentă.

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = \frac{1}{2}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{4n-1}{4n+3}$ **R:** Seria este divergentă.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^n$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = -\frac{5}{11}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = \frac{5}{2}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ **R:** Seria este divergentă.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = 1$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+3} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = \frac{11}{12}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$ **R:** Seria este divergentă.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = \frac{1}{3}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ **R:** Seria este divergentă.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[3^n + (-3)^n\right]$ **R:** Seria este divergentă.

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{b^{n+1}}$; $a, b \in R$, $b \neq 0$ **R:** Seria este convergentă dacă $\frac{a}{b} \in (-1, 1)$ şi are suma $\frac{1}{b-a}$ şi este divergentă în caz contrar.

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+3} + 2^{2n+1}}{8^{n+2}}$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = -\frac{43}{176}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = \frac{5}{12}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$ **R:** Seria este convergentă şi $S = \frac{1}{24}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+2}{n^3 + 3n^2 + 2n}$ **R:** Seria este convergentă şi are suma $S = \frac{5}{2}$.

Să se studieze natura următoarelor serii:

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{3n+2}$ **R:** Seria este divergentă.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ **R:** Seria este divergentă.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ **R:** Seria este divergentă.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n-3}{3n+5}$ **R:** Seria este divergentă.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ **R:** Seria este divergentă.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2n+1)}$ **R:** Seria este divergentă.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n^2+2)}$ **R:** Folosind criteriul 3 de comparaţie, rezultă că seria are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$, deci este divergentă.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\cdot 3^n}$ **R:** Seria este convergentă.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^2+5}{5n^3-1}$ **R:** Seria este divergentă.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^3+4n+3}$ **R:** Seria este convergentă.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{3n^7+n^2+1}+n+2}{6n^2-2n+1}$ **R:** Seria este divergentă.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^4}$ **R:** Seria este convergentă.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **R:** Seria este divergentă.

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5^n}$ **R:** Seria este convergentă.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[2n+1]{4n+2}}$ **R:** Seria este divergentă.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3+5n+7}$ **R:** Seria este convergentă.

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n^3+2}+1}$ **R:** Seria este divergentă.

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+2}+3\sqrt{n^2+1}+7}$ **R:** Seria este convergentă.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (3n^3-n)^{-\frac{1}{4}}$ **R:** Seria este divergentă.

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a^n}, a>0$ **R:** Seria este divergentă dacă $a \in (0, 1]$ (are aceeaşi natură cu seria armonică) şi este convergentă dacă $a>1$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n}$ **R:** Seria este divergentă.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot .....\cdot (4n-3)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot .....\cdot (5n-4)}$ **R:** Seria este convergentă.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}, a>-1$ **R:** Seria este divergentă dacă $a \in (-1, 1]$ şi este convergentă dacă $a>1$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}\right]^3$ **R:** Seria este convergentă.

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$ **R:** Seria este convergentă.

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{3n+2}\right)^n$ **R:** Seria este divergentă.

45. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n(\sqrt[n]{2}-1)\right)^n$ **R:** Seria este convergentă.

46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ **R:** Seria este convergentă.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+3}{5n+4}\right)^{2n^2-3}$ **R:** Seria este convergentă.

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{n}$ **R:** Seria este divergentă.

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5n+3}{5n+2}\right)^{n}$ **R:** Seria este divergentă.

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot \ldots \cdot (4n+1)}\right]^{2}$ **R:** Seria este convergentă.

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot n^n} a^n,\ a>0$ **52.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{n}$

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3n+5}{n^2+2n+3}\right)^{n^2} \cdot a^n,\ a>0$ **54.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n!}$ **55.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)^{n}$ **57.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+3)!}{2^n \cdot (2n-1)!} a^n,\ a>0$

Studiați convergența și absolut convergența seriilor:

58. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ **59.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ **60.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n^2}$

61. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\cdot 2^n}$ **62.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n^3}$ **63.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

64. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ **65.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n}$ **66.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ **67.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-3)^n}$

68. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$ **69.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n}$

Atunci când este posibil, calculați suma următoarelor serii:

70. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ **R:** 1

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ **R:** $\frac{1}{18}$;

72. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$ **R:** $\frac{1}{12}$

73. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^4+1}$ **R:** 1

74. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$ **R:** $\frac{1}{2}$;

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{n^3+4n^2+3n}$ **R:** $\frac{17}{9}$;

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ **R:** 1;

77. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+3}-(-1)^n 3^{n+1}}{5^{n+2}}$ **R:** $\frac{2057}{200}$;

78. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2+bn+c}{n!}$; $a,b,c \in R$ **R:** $e(2a+b+c)$;

79. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{(n+2)!}$ **R:** $\frac{1}{2}$;

80. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}$ **R:** $\frac{1}{2}$;

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n+n}{(-4)^n}$ **R:** $\frac{13}{75}$;

82. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+2}}{5^n}$ **R:** $\frac{89}{6}$;

83. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-1)^n}{5^n}$ **R:** $\frac{7}{48}$;

84. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{2^n}$ **R:** 9;

85. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+4}{5^n}$ **R:** $\frac{23}{8}$;

86. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-1)^{n+1}}{5^n}$ **R:** $\frac{5}{6}$

87. . $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(4n^2-1)}$ **R:** $\frac{1}{12}$

88. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}, \ |a|>1$ **R:** $\frac{a}{(a-1)^2}$;

89. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{a^n}, \ |a|>1$ **R:** $\frac{2a^2}{(a-1)^3}$;

90. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{a^n}, \ |a|>1$ **R:** $\frac{a(a+1)}{(a-1)^3}$;

91. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \sin \frac{n\pi}{3}$

92. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos n\pi}{3^n}$

93. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

94. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+3}+3^{2n+1}}{10^{n+2}}$

95 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n+3}+2^{2n+1}}{5^{n+2}}$

96. $\frac{1}{2^1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots..+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots...$

97. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+3}-(-1)^{n+1}3^{n+1}}{5^{n+2}}$

98. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}$

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{(-4)^n}$

100. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt[3]{8}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{16}}-\ldots....$

Stabiliți natura seriilor:

101. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ **102.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^n}{(n+1)^n}$ **103.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(1+2^n)}$

104. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+4}$ **105.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$ **106.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{4n+7}$ **107.** $\sum_{n=1}^{\infty}\cos n$

108. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+5}$ **109.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ **110.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^3+1}}$

111. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ **112.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^2+1}}{3+\sqrt[5]{8n^7-1}}$ **113.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+4\cdot 5^{n+2}}$

114. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$ **115.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{n!\cdot(n+2)!}a^n,\ a>0$ **116.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{7n+1}\right)^n$

117. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{2n+3}\cdot a^n, a>0$ **118.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+3}\cdot a^n, a>0$ **119.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{3^n}$

120. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot a^n, a>0$ **121.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n+7^n}{11^n}\right)^n$ **122.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

123. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^3}\cdot a^n, a>0$ **124.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^{n+1}}{(1+2^n)^n}$ **125.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

126. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n, a,b\in R$ **127.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n+1}{3n^2+1}\right)^{n(n^2+1)}$ **128.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

129. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n tg\frac{a}{3^n}, a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ **130.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

131. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3+n-1}}$ **132.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{n!}$ **133.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{7n+8}}{3n^2-2}$

134. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}{n}$ **135.** $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n\sqrt{n}}$ **136.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^n+5}{(3n+7)^n}$

137. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$ **138.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **139.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^n$

140. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$ **141.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)^a}{\left(\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n+1}\right)^b}$ **142.** $\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{a}{n}\right)^n, a>0$

143. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot7\cdot11\ldots\cdot(4n-1)}$ **144.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)}, \alpha>0$

145. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cdot a^n}{n^n\cdot 2^n}, a>0$ **146.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\left(\frac{a}{e}\right)^n, a>0$ **147.** $\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cdot tg\frac{a}{2^n}, \ a>0$

148. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)(2a+1)\ldots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\ldots(nb+1)}; \ a,b\in R_+$ **149.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n-1}\right)^n$

150. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^{n+1}}{(2^n+1)^n}$ **151.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot a^n, a>0$ **152.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n^2+7n+5}{2n^2+5n+9}\right)^n$

153. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n(n+1)}(n+2)^n}$ **154.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ **155.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\cdot a^n, a>0$

156. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+a)}-n\right)^{n}, a>0$ **157.** $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2} e^{-\sqrt{n}}$ **158.** $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, a>0$

159. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(a \ln n+\ln n^{2}\right)},\ 0<a<1$ **160.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}$

161. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{n+1}{(n+1) \sqrt{n+1}-1}$ **162.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot(2 n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot(2 n)}$

163. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} \frac{1}{n \cdot 3^{n}}$ **164.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \ln \frac{3 n^{2}+2}{n^{2}+1}$ **165.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2+(-1)^{n}}{n^{2}}$

166. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2 n+1}}$ **167.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{e^{-n^{2}}}{n+1}$ **168.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n}-n}$

169. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{n^{4}+1}{n^{4}}\right)$ **170.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2} \ln n}$ **171.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n} \cdot n!}{n^{n}}$

172. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n} \cdot n^{n}}{n!}, a>0$ **173.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n}+2^{n}}{n!}$ **174.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^{2}}{(2 n)!}$

175. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3 n-1}\right)^{2 n-1}$ **176.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a^{n}}, a>-1$ **177.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 n+3}{n(n+1)(n+2)}$

178. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{2}+3 n+5}-\sqrt{n^{2}-3 n+5}\right)^{n}$ **179.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^{n}+4^{n}}{3^{n+1}+4^{n+1}}\right)^{n} \cdot a^{n},\ a>0$

180. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^{2}+3 n+5}{n^{2}+2 n+3}\right)^{n^{2}} \cdot a^{n}, a>0$ **181.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2) \ldots(a+n)}{b(b+1)(b+2) \ldots(b+n)} ; 0<a<b$

182. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+3}-(-1)^{n+1} 3^{n+1}}{5^{n+2}}$ **183.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$

184. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{4}+1}+\sqrt{n^{2}+1}}$ **185.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot(5 n-3)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot(4 n+1)}$

186. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2}+n-1}{(n+1)!}$ **187.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^{2}+1}}{\sqrt{n^{3}+1}}$ **188.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}+5^{n}}{2^{n+1}+5^{n+1}}$

189. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(2n)!}$ **190.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{2n+3}\cdot a^n, a>0$ **191.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a\frac{n^2+n+1}{3n^2}\right)^n, a>0$

192. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+5}}$ **193.** $\sum_{n=1}^{\infty}a^{\ln n}, a>0$ **194.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}$

195. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{5n-1}\right)^{2n^2+1}$ **196.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{n}$

197. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{2n-1}{5n^3+7n+4}$ **198.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^3$

199. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+a^n}, a>-1$ **200.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a+1}{n^b+1};\ a,b\in R$

7.2. SERII DE PUTERI

BREVIAR TEORETIC

Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, Se numeşte *mulțime de convergență* a seriei de puteri mulțimea formată din punctele în care seria este convergentă: $C = \left\{ x \in R \mid \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ convergentă} \right\}$.

Teorema 1 (Teorema lui Abel). Pentru orice serie de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ există R, $0 \le R \le \infty$, astfel încât:

1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-R, R)$;
2) seria este divergentă pe mulțimea $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$;
3) pentru orice $r \in (0, R)$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

Observație. R se numeşte rază de convergență.

Teorema 2 (Cauchy-Hadamard). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri şi R raza de convergență. Dacă notăm $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0 \\ 0, & \omega = \infty \end{cases}.$$

Observație. Se poate calcula ω şi după formula: $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Teorema 3. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ şi $S(x)$ suma acesteia.

Atunci:

$a)$ seria derivatelor are aceeaşi rază de convergență R ca şi seria dată;

$b)$ funcția S este derivabilă pe intervalul de convergență şi derivata acesteia $S'(x)$ este egală cu suma seriei derivatelor.

Teorema 4. Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ şi $S(x)$ suma acesteia.

Atunci:

$a)$ funcția $S(x)$ admite primitive şi este integrabilă pe orice interval $[a,b] \subset (-R,R)$;

$b)$ seria primitivelor are aceeaşi rază de convergență R ca şi seria dată;

$c)$ abstracție făcând de o constantă, pentru $x \in (-R,R)$ avem:

$\int \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n x^n dx = \int S(x) dx$ şi în particular, pentru $[a,b] \subset (-R,R)$ are loc relația:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx = \int_a^b S(x) dx .$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se studieze convergența seriei de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \cdot 5^n} \cdot x^n, \; x \in R \cdot$$

Rezolvare:

- Calculăm raza de convergență. Fie $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n \cdot 5^n}$. Avem că:

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|(-1)^{n+1} \dfrac{1}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n \dfrac{1}{n\cdot 5^n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{1}{5}\text{, deci}$$

$R = \dfrac{1}{\omega} = 5$.

- Conform teoremei lui Abel, rezultă că:

1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-5,5)$;
2) seria este divergentă pe mulțimea $(-\infty,-5)\cup(5,\infty)$;
3) pentru orice $r \in (0,5)$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r,r]$.

- Studiem natura seriei pentru $R = \pm 5$:

Pentru $R = 5$, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n\cdot 5^n}\cdot 5^n$, adică $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$; şirul $u_n = \dfrac{1}{n}$ este descrescător şi are limita zero; rezultă, conform criteriului lui Leibniz, că seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n}$ este convergentă.

Pentru $R = -5$, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{1}{n\cdot 5^n}\cdot(-5)^n$, adică $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, care este divergentă (seria armonică).

În concluzie, seria este convergentă pe mulțimea $(-5,5]$.

2. Să se determine mulțimea de convergență a seriei de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (x-3)^n,\ x \in R.$$

Rezolvare:

- Notăm $y = x - 3$. Vom determina mai întâi mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot y^n$.
- Calculăm raza de convergență. Fie $a_n = \left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n$. Avem:

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n\right|} = \frac{1}{3}, \text{ deci } R = \frac{1}{\omega} = 3.$$

- Conform teoremei lui Abel, avem:

1) seria este absolut convergentă pe intervalul $(-3,3)$;

2) seria este divergentă pe mulțimea $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$;

3) pentru orice $r \in (0,3)$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r,r]$.

- Studiem natura seriei pentru $y = \pm 3$:

Pentru $y = 3$, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot 3^n$, adică $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+3}{6n-5}\right)^n$. Notăm $u_n = \left(\frac{6n+3}{6n-5}\right)^n$; avem că

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{6n-5}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{6n-5}} = e^{\frac{4}{3}} \neq 0,$$

deci, conform criteriului suficient de divergență, seria este divergentă.

Pentru $y = -3$, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (-3)^n$, adică $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{6n+3}{6n-5}\right)^n$; notăm $u_n = (-1)^n\left(\frac{6n+3}{6n-5}\right)^n$; avem că şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este divergent (nu există $\lim_{n\to\infty} u_n$), deci seria este divergentă.

În concluzie, seria de puteri este convergentă pentru $y \in (-3,3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -3 < y < 3 \Leftrightarrow -3 < x-3 < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6$. Prin urmare,
mulțimea de convergență a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{6n-5}\right)^n \cdot (x-3)^n$ este $(0,6)$.

3. Să se determine mulțimea de convergență a seriei de puteri
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} \cdot (x+2)^n$

Rezolvare:

- Notăm $y = x+2$. Vom determina mai întâi mulțimea de convergență a seriei. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} y^n$
- Calculăm raza de convergență. Fie $a_n = \frac{3^n + (-4)^n}{n}$, $n \geq 1$.

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|\frac{3^{n+1} + (-4)^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{3^n + (-4)^n}{n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{(n+1)} \cdot \left|\frac{3^{n+1} + (-4)^{n+1}}{3^n + (-4)^n}\right| =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{(n+1)} \cdot \left|\frac{(-4)^{n+1}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1} + 1\right)}{(-4)^n\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)}\right| = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

Conform teoremei lui Abel, rezultă că:

1) seria este absolut convergentă pentru $y \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$;

2) seria este divergentă pentru $y \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$;

3) pentru orice $r \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, seria este uniform convergentă pe intervalul $[-r, r]$.

- Studiem natura seriei pentru $y = \pm\frac{1}{4}$:

Pentru $y = \frac{1}{4}$, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^n$, adică $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right]$. Avem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$ este convergentă (folosind criteriul raportului) şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ este convergentă (folosind criteriul lui Leibniz), prin urmare seria este convergentă.

Pentru $y = -\frac{1}{4}$, seria de puteri devine: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-4)^n}{n} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$, adică $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{n}\right]$. Notăm $b_n = (-1)^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $n \in N^*$ $c_n = \frac{1}{n}$, $n \in N^*$ şi $d_n = (-1)^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{n}, n \in N^*$. Avem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă (folosind criteriul lui Leibniz). Dacă presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ este convergentă, deoarece $c_n = d_n - b_n, (\forall) n \in N^*$, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este convergentă, contradicție. Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ este divergentă.

În concluzie, seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-4)^n}{n}\cdot y^n$ este convergentă pentru

$$y\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<y\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<x+2\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow -\frac{9}{4}<x\le-\frac{7}{4}.$$

Am obținut că mulțimea de convergență a seriei

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-4)^n}{n}\cdot(x+2)^n$ este $\left(-\frac{9}{4},-\frac{7}{4}\right]$.

4. Să se determine mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\left((-1)^n+4\right)^n}$.

Rezolvare:

- Calculăm raza de convergență. Fie $a_n=\frac{1}{\left((-1)^n+4\right)^n}$, $n\ge 0$.

$$\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{\left((-1)^n+4\right)^n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{(-1)^n+4}\text{; fie}$$

$b_n=\frac{1}{(-1)^n+4}$, $n\ge 0$. deoarece $\lim_{n\to\infty}b_{2n}=\frac{1}{5}$ și $\lim_{n\to\infty}b_{2n+1}=\frac{1}{3}$,

rezultă că $\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{(-1)^n+4}=\max\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, deci $R=\frac{1}{\omega}=3$.

- Conform teoremei lui Abel, avem:

1) seria este absolut convergentă pentru $x\in(-3,3)$;

2) seria este divergentă pentru $x\in(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$.

- Studiem natura seriei pentru $x=\pm 3$:

Pentru $x=3$, seria de puteri devine: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{\left((-1)^n+4\right)^n}$;

fie $b_n=\frac{3^n}{\left((-1)^n+4\right)^n}$, $n\ge 0$; avem că $b_{2n+1}=1,\ \forall n\ge 0$, deci

$\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ şi conform criteriului suficient de divergență rezultă că seria este divergentă.

Pentru $x = -3$, seria de puteri devine: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\left((-1)^n + 4\right)^n}$;

fie $c_n = \frac{(-3)^n}{\left((-1)^n + 4\right)^n}$, $n \geq 0$; avem că $c_{2n+1} = -1,\ \forall n \geq 0$, deci

$\lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$ şi conform criteriului suficient de divergență rezultă că seria este divergentă.

Prin urmare, mulțimea de convergență a seriei de puteri este $(-3,3)$.

Să se determine mulțimea de convergență şi suma următoarelor serii de puteri:

5. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

Rezolvare:

Considerăm seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

- Raza de convergență a acestei serii este $R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1$.
- Pentru $x \in (-1,1)$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ este convergentă şi are suma

$S(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$ (am folosit seria geometrică). Prin urmare, putem scrie că $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},\ \ \forall x \in (-1,1)$.

Aplicând teorema 3, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)'$, $\forall x \in (-1,1)$,

relație echivalentă cu: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $\forall x \in (-1,1)$.

Înmulțind cu x relația precedentă, obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \ \forall x \in (-1,1).$$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

Rezolvare:

Considerăm seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}$, care are raza de convergență $R=1$. Avem că $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}$, $\forall x \in (-1,1)$.

Aplicând teorema 3, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'$, $\forall x \in (-1,1)$,

relație echivalentă cu: $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$, $\forall x \in (-1,1)$.

Aplicând din nou teorema 3, rezultă că

$\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)x^n\right)' = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'$, $\forall x \in (-1,1)$, de unde obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nx^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}, \ \forall x \in (-1,1).$$

Înmulțind cu x relația precedentă, obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)nx^n = \frac{2x}{(1-x)^3}, \ \forall x \in (-1,1).$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

Rezolvare:

Pentru $x \in (-1,1)$ avem:

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n - n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + n) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ şi folosind rezultatele obținute la problemele **5** şi **6**, obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2},\ \forall x \in (-1,1),\ \text{sau}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3},\ \forall x \in (-1,1).$$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Rezolvare:

Considerăm seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, având raza de convergență $R = 1$ şi suma $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Prin urmare, putem scrie că $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},\ \forall x \in (-1,1)$. Aplicând teorema 4, rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} \int x^{n-1} dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} dx + C$, pentru $x \in (-1,1)$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int \frac{1}{1-x} dx + C = -\ln(1-x) + C,\ \forall x \in (-1,1).$$

Pentru $x = 0$ obținem $C = 0$, deci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),\ \forall x \in (-1,1)$.

PROBLEME PROPUSE

Să se studieze convergența seriei de puteri :

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^n}\cdot x^n,\ x\in R\cdot$

R: serie convergentă pentru $x\in(-3,\,3]$ şi divergentă în rest.

Să se determine mulțimea de convergență a următoarelor serii de puteri

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{5n+1}\right)^n\cdot(2-x)^n,\ x\in R$ **R:** $C=\left(\frac{1}{3},\,\frac{11}{3}\right)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n^2}$ **R:** $C=[-2,\,2]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^n}$ **R:** $C=R$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-1)\cdot 3^n}x^n$ **R:** $C=[-3,\,3)$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^n$ **R:** $C=\{0\}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ **R:** $C=[-1,\,1)$

8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{(n+1)^5x^n}$ **R:** $C=(-\infty,-1]\cup[1,\,\infty)$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ **R:** $C=\left[-\frac{1}{e},\,\frac{1}{e}\right)$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-4)^n]x^n$ **R:** $C=\left(-\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}\right)$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot x^n$ **R:** $C=\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\frac{x^{3n+1}}{n+1}$ **R:** $C=\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}},\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right]$

13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+5}}{n!}$ **R:** $C=R$

14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-2x)^n}{\left((-1)^n+3\right)^n}$ **R:** $C=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n+5\right)^n(x+1)^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}\cdot x^n$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln a)^n}{n!}\cdot x^n,\ a>0$

19. $\sum_{n=0}^{\infty}(3n+1)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$

20. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)^n\left(\frac{2x+1}{5x-2}\right)^n$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1}\left(\frac{4x-1}{x+3}\right)^n$

22. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2+2n+2}{2n^2+n+2}\right)^n\cdot(x-1)^n$

23. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{2n}$

24. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n \cdot 2^n} \cdot x^n$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\alpha^n) \cdot \dfrac{x^n}{n}, \ \alpha > 0$

28. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n+1}$

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n^2+2n+2}{3n^2+n+2} \right)^n \cdot x^n$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \left(\dfrac{x}{x-1} \right)^n$

31. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n+1)! \cdot 3^n}{n!(n+2)!} \cdot (x-2)^n$

32. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{n+1} \cdot (x-3)^n$

33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1} (-1)^n \left(\dfrac{3x-1}{x+2} \right)^n$

34. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot (1-x)^n$

35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \cdot (3-x)^n$

36. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a(a-1).....(a-n+1)}{n!} \cdot (x+2)^n; \ \ a > 0$

37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n} \cdot (x+3)^n$

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n} \left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$

Să se determine mulțimea de convergență şi suma următoarelor serii de puteri:

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$ **R:** $C = (-1, 1)$**;** $S(x) = \dfrac{x^2}{(1-x)^2}$**.**

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^{n-1}$ **R:** $C = (-1, 1)$**;** $S(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$**.**

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n+1}$ **R:** $C = (-1, 1)$**;** $S(x) = \dfrac{x^2(x+1)}{(1-x)^3}$**.**

43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)(n+2) x^n$ **R:** $C = (-1, 1)$**;** $S(x) = \dfrac{6x}{(1-x)^4}$**.**

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ **R:** $C = (-1, 1)$**;** $S(x) = \dfrac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$**.**

45. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)(n+3) x^n$ **R:** $C = (-1, 1)$**;** $S(x) = \dfrac{6}{(1-x)^4}$**.**

46. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ **R:** $C=(-1,\,1)$**;** $S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in(-1,\,1)\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$**.**

47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}$ **R:** $C=(-1,\,1)$**;** $S(x)=-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$**.**

48. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$ **R:** $C=(-2,\,0)$**;** $S(x)=-\frac{1}{x}$**.**

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$ **R:** $C=(-2,\,0)$**;** $S(x)=\frac{x+1}{x^2}$**.**

50. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2(x+1)^n$ **R:** $C=(-2,\,0)$**;** $S(x)=\frac{-(x+1)(x+2)}{x^3}$**.**

51. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2x^n$ **R:** $C=(-1,\,1)$**;** $S(x)=\frac{1-x}{(x+1)^3}$**.**

52. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{b^n}x^n;\ a,b\neq 0$ **R:** $C=\left(-\frac{b}{a},\,\frac{b}{a}\right)$**;** $S(x)=\frac{b}{b-ax}$**.**

53. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{na^n}{b^n}x^n;\ a,b\neq 0$ **R:** $C=\left(-\frac{b}{a},\,\frac{b}{a}\right)$**;** $S(x)=\frac{abx}{(b-ax)^2}$**.**

7.3. DEZVOLTĂRI ÎN SERIE

BREVIAR TEORETIC

Fie $f: I \to R,\ a \in I$ astfel încât f indefinit derivabilă în punctul a. Se numeşte *polinom Taylor de ordin n* asociat funcției f în punctul a, polinomul:

$$T_n(x,a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k.$$

Se numeşte *rest Taylor de ordin n* al funcției f în punctul a, funcția:

$$R_n(\cdot,\ a): I \to R,\quad R_n(x,a) = f(x) - T_n(x,a).$$

Formula lui Taylor: $f(x) = T_n(x,a) + R_n(x,a),\ \forall x \in I$.

Se numeşte *serie Taylor* asociată funcției f în punctul a, seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n.$$

Fie A mulțimea de convergență a acestei serii.

Formula de dezvoltare a funcției f în serie Taylor în punctul a

este: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$, pentru $x \in A \cap I$ cu proprietatea că $\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$.

Pentru $a = 0$, obținem *seria Mac-Laurin* asociată funcției f:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n.$$

Forme ale restului Taylor de ordinul n al funcției f în punctul a:

- *restul Taylor sub formă Lagrange:*

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1},\text{ cu } c \text{ între } a \text{ şi } x;$$

- *restul Taylor sub formă Cauchy:*

$$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^{n}(x-a)\text{ ,cu } c \text{ între } a \text{ şi } x.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră funcția $f: R\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}\to R, f(x)=\frac{1}{3x+2}$.

a) Să se scrie seria Taylor asociată funcției în punctul $a=1$.

b) Să se calculeze mulțimea de convergență a acestei serii.

c) Să se determine restul Taylor de ordin n al funcției f în punctul $a=1$.

Rezolvare:

a) Seria Taylor asociată funcției f în punctul $a=1$ este:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(x-1)^n.$$

Funcția f este indefinit derivabilă pe $R\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ şi avem:

$f(x)=(3x+2)^{-1}$

$f'(x)=3(-1)(3x+2)^{-2}$

$f''(x)=3^2(-1)(-2)(3x+2)^{-3}$

....

$f^{(n)}(x)=3^n(-1)(-2)....(-n)(3x+2)^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n3^n n!}{(3x+2)^{n+1}}$, deci

$f^{(n)}(1)=\frac{(-1)^n 3^n n!}{5^{n+1}}, \forall n\in N$. Prin urmare, seria Taylor asociată

funcției f în punctul $a=1$ este: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{5^{n+1}}\cdot(x-1)^n$.

$b)$ Notăm $x-1=y$. Avem că:

$$\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\left|\frac{(-3)^{n+1}}{\cdot 5^{n+2}}\right|}{\left|\frac{(-3)^n}{5^{n+1}}\right|}=\frac{3}{5},\text{ deci } R_y=\frac{5}{3}.$$

Pentru $y=\frac{5}{3}$ obținem seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{5}$, care este divergentă, deoarece termenul ei general nu are limita zero; pentru $y=-\frac{5}{3}$ obținem seria $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}$, care este divergentă; prin urmare seria obținută este convergentă pentru $y\in\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$, adică $x\in\left(-\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$.

Rezultă că mulțimea de convergență este $A=\left(-\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$.

$c)$ Folosim expresia restului Taylor sub formă Lagrange:

$R_n(x,1)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-1)^{n+1}$, cu c între 1și x. Obținem:

$R_n(x,1)=\frac{(-3)^{n+1}}{(3c+2)^n}\cdot(x-1)^{n+1}$, cu c între 1 şi x.

2. $a)$ Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f:R\to R, f(x)=e^x$.

$b)$ Să se calculeze valoarea lui $\sqrt{e}$ cu trei zecimale exacte.

$c)$ Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $g:R\to R, f(x)=e^{x^3}$.

$d)$ Să se calculeze sumele seriilor: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ şi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{an^2+bn+c}{n!}$.

Rezolvare:

$a)$ Seria Mac-Laurin asociată funcției f este: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$.

Funcția f este indefinit derivabilă pe R și $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in N \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1, \forall n \in N$. Am obținut că:

seria Mac-Laurin asociată funcției f este : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$.

Determinăm mulțimea pe care este valabilă dezvoltarea funcției f în serie Mac-Laurin

- Calculăm mulțimea de convergență A a acestei serii.

$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{(n+1)} = 0 \Rightarrow R = \infty$, deci seria este convergentă pentru $x \in (-\infty, \infty)$. Rezultă că $A = R$.

- Determinăm mulțimea valorilor lui x pentru care $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$.
- Folosim expresia restului Taylor sub formă Lagrange:

$R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$, cu c între 0 și x;

$|R_n(x,0)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^c \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^c$, cu c între 0 și x;

rezultă că $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0, \forall x \in R$, deci $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in R$.

$b)$ Scriem relația precedentă pentru $x = -\frac{1}{2}$ și obținem:

$$e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!}.$$

Folosim definiția restului Taylor de ordin n:

$R_n(x,0) = f(x) - T_n(x,0)$.

Pentru $x = -\frac{1}{2}$ avem că $\left|f\left(-\frac{1}{2}\right) - T_n\left(-\frac{1}{2},0\right)\right| = \left|R_n\left(-\frac{1}{2},0\right)\right| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|e^{-\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\right| = \left|\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot e^c, \quad c \in (-\tfrac{1}{2},0). \quad (1)$$

Intenționăm să găsim o valoare n pentru care

$\left|e^{-\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}\right| < 0{,}001$. În aceste condiții, numerele $A = e^{-\frac{1}{2}}$ şi

$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ au primele trei zecimale comune.

Conform relației (1), deducem că este suficient să găsim o valoare

n pentru care $\left|\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot e^c < 0{,}001$, $\quad c \in \left(-\frac{1}{2},0\right)$. Deoarece

pentru $c \in \left(-\frac{1}{2},0\right)$ avem că $e^c < e^0 = 1$, rezultă că este suficient să

găsim o valoare n pentru care $\frac{\left|-\frac{1}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}001 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10^3}$,

relație adevărată pentru $n \geq 4$.

Pentru $n = 4$ obținem $|A - T_4| < 0{,}001$, deci

$$A \approx T_4\left(-\frac{1}{2},0\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^0}{0!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{4!} \approx 0{,}606.$$

Rezultă că $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}606$.

$c)$ Înlocuind x cu x^3 în formula găsită la punctul $a)$, obținem:

$$e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!},\ \forall x \in R.$$

$d)$ Folosim rezultatul de la punctul $a)$: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \forall x \in R$.

- Pentru $x = 1$ obținem că suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ este : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.
- Considerăm seriile: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}$ și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

Avem că: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = e$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)+1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n-1)!} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = 2e.$$

Conform propoziției 1 din breviarul teoretic de la serii numerice, rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{an^2 + bn + c}{n!}$ este convergentă și are suma $S = a \cdot 2e + b \cdot e + c \cdot e = e(2a + b + c)$.

3. Să se determine seria Taylor în punctul $a = -2$ asociată funcției: $f : \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \to R, f(x) = \ln(3 - 2x)$.

Rezolvare:

Seria Taylor asociată funcției f în punctul $a=-2$ este:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-2)}{n!}\cdot(x+2)^n.$$

Funcția f este indefinit derivabilă pe $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$ și avem:

$$f'(x)=\frac{-2}{3-2x}=2(2x-3)^{-1}$$

$$f''(x)=2^2(-1)(2x-3)^{-2}$$

$$f'''(x)=2^3(-1)(-2)(2x-3)^{-3}$$

....

$$f^{(n)}(x)=2^n(-1)^{n-1}(n-1)!(2x-3)^{-n},\forall n\in N^*$$

$$f^{(n)}(-2)=2^n(-1)^{n-1}(n-1)!(-7)^{-n}=-\left(\frac{2}{7}\right)^n(n-1)!,\forall n\in N^*;$$

$$f^{(0)}(-2)=\ln 7.$$

Am obținut că seria Taylor asociată funcției f în punctul $a=-2$ este: $\ln 7+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}\left(\frac{2}{7}\right)^n\cdot(x+2)^n$.

4. $a)$ Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f:(-1,\infty)\to R,\ f(x)=\ln(1+x)$ și să se precizeze mulțimea pe care este valabilă dezvoltarea găsită.

$b)$ Să se demonstreze că $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$.

Rezolvare:

a) Seria Mac-Laurin asociată funcției f este de forma:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$. Avem: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$;

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ $f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}$ .... $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)1}{(1+x)^n}$.

Prin inducție se arată că $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$, $\forall n \in N^*$.

Pentru $n = 0$, avem $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$.

Seria Mac-Laurin asociată funcției f este deci: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n$.

Determinăm mulțimea pe care este valabilă dezvoltarea funcției f în serie Mac-Laurin.

- Calculăm mulțimea de convergență A a acestei serii.

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{(n+1)} = 1 \Rightarrow R = 1 \text{, deci}$$

seria este convergentă pentru $x \in (-1,1)$.De asemenea, pentru $x = 1$ obținem o serie alternată convergentă, în baza criteriului lui Leibniz. Rezultă că $A = (-1,1]$.

- Determinăm mulțimea valorilor lui $x \in (-1,1]$ pentru care $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$.

- Pentru $x \in [0,1]$ folosim expresia restului Taylor sub formă

Lagrange: : $R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$, cu c între 0 şi x;

$$\left|R_n(x,0)\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+c)^{n+1}}\right| = \left|\frac{x}{(1+c)}\right|^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} \quad ,$$

cu c între 0 şi x, adică $0 < c < x < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x}{1+c} < 1$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0,\ \forall x \in (0,1]$.

- Pentru $x \in (-1,0]$ folosim expresia restului Taylor sub formă

Cauchy: $R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n x$, cu c între 0 şi x;

$$\left|R_n(x,0)\right| = \left|\frac{x(x-c)^n}{n!}(-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+c)^{n+1}}\right| = \left|\frac{x-c}{1+c}\right|^n\cdot\left|\frac{x}{1+c}\right|,$$

cu c între 0 şi x, adică $-1 < x < c < 0 \Rightarrow -1 < \frac{x-c}{1+c} < 0$.

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0,\ \forall x \in (-1,0]$.

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0,\ \forall x \in (-1,1]$.

Obţinem că: $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n,\ \forall x \in (-1,1]$.

b) Pentru $x = 1$ obţinem: $\ln 2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

5. *a*) Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcţia $f: R \to R, f(x) = \cos x$. Să se afle valoarea numărului $\cos 1$ cu două zecimale exacte

b) Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcţia $f: R \to R, f(x) = \sin x$;

$c)$ Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția

$f : R \to R, f(x) = \sin x^2$

$d)$ Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția

$f : R \to R, f(x) = \cos^2 x$

Rezolvare:

$a)$ Seria Mac-Laurin asociată funcției f este de forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n .$$

Funcția f este indefinit derivabilă pe R și avem:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, n = 4k \\ -\sin x, n = 4k+1 \\ -\cos x, n = 4k+2 \\ \sin x, n = 4k+3 \end{cases} \text{sau } f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1, \ n = 4k \\ 0, \ n = 4k \pm 1 \\ -1, \ n = 4k+2 \end{cases} \text{sau } f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Obținem seria Mac-Laurin asociată funcției f :

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{\backslash 6!} - .... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \text{sau } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

Determinăm mulțimea pe care este valabilă dezvoltarea funcției f în serie Mac-Laurin

- Calculăm mulțimea de convergență A a acestei serii. Notăm $x^2 = y$ și vom determina raza de convergență a seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot y^n .$$

$$\omega_y = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right|} = 0 \Rightarrow R_y = \infty$$, deci seria este

convergentă pentru $y \in (-\infty, \infty) \Rightarrow x \in (-\infty, \infty)$. Rezultă că $A = R$.

- Determinăm mulțimea valorilor lui x pentru care $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$.

Folosim expresia restului Taylor sub formă Lagrange:

$R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$, cu c între 0 şi x;

$$|R_n(x,0)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left|\cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|,$$

cu c între 0 şi x; deoarece $\left|\cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$ şi

$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0, \ \forall x \in R$.

Prin urmare, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in R$.

Vom afla valoarea lui $\cos 1$ cu două zecimale exacte.
Scriem relația precedentă pentru $x = 1$ şi vom obține:

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}.$$

Folosim definiția restului Taylor de ordin n:

$R_n(x,0) = f(x) - T_n(x,0)$.

Pentru $x = 1$ avem că $|f(1) - T_n(1,0)| = |R_n(1,0)| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\cos 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\right| = \frac{1}{(n+1)!}\left|\cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|, \quad c \in (0,1). \quad (1)$$

Intenționăm să găsim o valoare n pentru care

$\left|\cos 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\right| < 0{,}01$. În aceste condiții, numerele $A = \cos 1$

și $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ au primele două zecimale comune.

Conform relației (1), deducem că este suficient să găsim o valoare

n pentru care $\frac{1}{(n+1)!}\left|\cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| < 0{,}01$, $c \in (0,1)$.

Deoarece $\left|\cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$,

rezultă că este suficient să găsim o valoare n pentru care

$\frac{1}{(n+1)!} < 0{,}01 \Leftrightarrow (n+1)! > 100$, relație adevărată pentru $n \ge 5$.

Pentru $n = 5$ obținem $\left|A - T_5\right| < 0{,}01$, deci

$$A \approx T_5(1{,}0) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} \approx 0{,}5403025794.$$

Deci valoarea numărului $\cos 1$ cu două zecimale exacte este: $\cos 1 \approx 0{,}54$.

$b)$ Analog se obține: $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x \in R$.

$c)$ Înlocuind x cu x^2 în formula obținută la punctul $b)$, avem

că: $\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \forall x \in R$.

$d)$ Vom folosi formula: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$.

Înlocuim pe x cu $2x$ în formula de la punctul $a)$:

$\cos 2x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \forall x \in R$, de unde rezultă:

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}, \forall x \in R$.

6. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția

$$f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Rezolvare:

Avem $f^{(n)}(0) = 0\ \ \forall n \geq 1$ (se poate arăta prin inducție)

Seria Mac-Laurin asociată funcției f este de forma:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$,

Deci seria Mac-Laurin asociată funcției f este identic nulă

Asadar suma acestei serii este $S(x) = 0\ \forall x \in R$

Observație: $f(x) \neq S(x)$ dacă $x \neq 0$,dar $f(0) = S(0)$

7. Să se determine seria Taylor în punctul $a = -2$ pentru funcția: $f : R \setminus \{-\frac{1}{2};3\} \to R, f(x) = \dfrac{3x-2}{2x^2-5x-3}$.

Rezolvare:

Seria Taylor asociată funcției f în punctul $a=-2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-2)}{n!}\cdot(x+2)^n.$$

Funcția f este indefinit derivabilă pe $R\setminus\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$.

Descompunem f în fracții simple:

$$f(x)=\frac{3x-2}{2x^2-5x-3}=\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{x-3}.$$

Procedând la fel ca la problema 1, obținem:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-2)^n n!}{(2x+1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}},\forall n\in N.$$

$$f^{(n)}(-2)=-\frac{2^n n!}{3^{n+1}}-\frac{n!}{5^{n+1}},\forall n\in N.$$

Rezultă că seria Taylor asociată funcției f în punctul $a=-2$ este:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right](x+2)^n$$

8. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f:(-1,\infty)\to R,\ f(x)=(1+x)^{\alpha}$, unde $\alpha\in R$. (*Seria binomială*)

Rezolvare:

Seria Mac-Laurin asociată funcției f este: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$.

Funcția f este indefinit derivabilă pe $(-1,\infty)$ şi avem:

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

....

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot.....\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\forall n\in N^*.$$

$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdot.....\cdot(\alpha-n+1),\forall n\in N^*$.

Rezultă că seria Mac-Laurin asociată funcției f este:

$$f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot....\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n.$$

Determinăm mulțimea pe care este valabilă dezvoltarea funcției f în serie Mac-Laurin.

- Calculăm mulțimea de convergență a acestei serii.

$\omega=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n-\alpha}{n+1}=1\Rightarrow R=1$, deci seria este convergentă pentru $x\in(-1,1)$. Rezultă că pe intervalul $(-1,1)$ seria este convergentă.

- Determinăm mulțimea valorilor lui x pentru care $\lim_{n\to\infty}R_n(x,0)=0$.
- Folosim expresia restului Taylor sub formă Cauchy: :

$R_n(x,a)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n(x-a)$, cu c între a și x;

$R_n(x,0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n(x)=$

$=\frac{x(x-c)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1}$, cu c între 0 și x; notăm $\theta=\frac{c}{x}$, $0<\theta<1$ și obținem

$$R_n(x,0)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}=$$

$$=\frac{(\alpha-1)....(\alpha-1-n+1)x^n}{n!}\cdot\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Folosind că $0<\theta<1$ şi că $-1<x<1$ rezultă că

$$0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n<1 \text{; de asemenea,}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha-1)....(\alpha-1-n+1)x^n}{n!}=0 \text{; obținem că}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x,0)|=0,\ \forall x\in(-1,1)$. Rezultă că:

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot....\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n,\ \forall x\in(-1,1). \quad (1)$$

9. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin următoarele funcții:

$f:R\setminus\{-1\}\to R, f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ şi $g:R\setminus\{1\}\to R, g(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Rezolvare:

Funcția f este indefinit derivabilă pe $R\setminus\{-1\}$.

Aplicăm relația (1) din problema precedentă pentru $\alpha=-1$ şi

rezultă: $(1+x)^{-1}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)(-2)\cdot....\cdot(-n)}{n!}\cdot x^n$, sau

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n,\ \forall x\in(-1,1). \quad (2)$$

Înlocuind pe x cu $-x$ în relația (2), rezultă:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ \forall x\in(-1,1). \quad (3)$$

10. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f:R\to R, f(x)=arctgx$.

Rezolvare:

Funcția f este indefinit derivabilă pe R.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{-1}$$

Scriem relația (1) pentru $\alpha=-1$ şi x înlocuit cu x^2:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\left(1+x^2\right)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)}{n!}\cdot\left(x^2\right)^n=$$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ \forall x\in(-1,1)$. Rezultă că, pentru $x\in(-1,1)$, avem:

$$f(x)=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}dx+C=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+C$$; pentru $x=0$

rezultă $C=0$, prin urmare $arctgx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ \forall x\in(-1,1)$.

11. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f:[-1,1]\to R,\ f(x)=\arcsin x$.

Rezolvare:

Funcția f este indefinit derivabilă pe intervalul (-1,1).

Avem că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}},\ \forall x\in(-1,1)$.

Scriind formula (1) obținută pentru seria binomială cu $\alpha=-\frac{1}{2}$ şi înlocuind x cu $-x^2$ avem:

$$f'(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}\cdot\left(-x^2\right)^n,\ \forall x\in(-1,1)\cdot$$

Pentru $x\in(-1,1)$, avem:

$$f'(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot x^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^{2n},$$

de unde, prin integrare, obținem că:

pentru $x \in (-1,1)$, avem: $f(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$;

pentru $x = 0$ rezultă $C = 0$, deci

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ (\forall) x \in (-1,\ 1).$$

12. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f : (-\infty,\ 2) \to R,\ f(x) = \ln(2-x)$.

Rezolvare:

Funcția f este indefinit derivabilă pe $(-\infty, 2)$.

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} = \frac{1}{-2+x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Scriem formula (3) cu x înlocuit prin $\frac{x}{2}$ şi pentru $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ rezultă:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$, de unde, prin integrare, obținem:

$$f(x) = \ln(2-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \int x^n dx + C,\quad \forall x \in (-2,2);$$

$$f(x) = \ln(2-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} + C,\quad \forall x \in (-2,2).$$

Pentru $x = 0$, obținem $C = \ln 2$, prin urmare

$$\ln(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot x^n,\quad \forall x \in (-2,2).$$

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră funcția $f : R \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\} \to R, f(x) = \frac{1}{4x-1}$.

a) Să se scrie seria Taylor asociată funcției în punctul $a = 1$.

b) Să se calculeze mulțimea de convergență a serii obținute.

c) Să se determine restul Taylor de ordin n al funcției f în punctul $a = 1$.

R: *a*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{3^{n+1}} \cdot (x-1)^n$; *b*) $A = \left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$;

c) $R_n(x,1) = \frac{(-4)^{n+1}}{(4c-1)^n} \cdot (x-1)^{n+1}$, cu c între 1 şi x.

2. *a*) Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcțiile

$f : R \to R,\ f(x) = e^{2x+1}$ şi $g : R \to R,\ g(x) = e^{x^2}$

b) Să se calculeze valoarea lui $\sqrt[3]{e}$ cu trei zecimale exacte.

c) Să se calculeze suma seriei: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + 4n + 5}{n!}$.

R: *a*) $e^{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n!}, \forall x \in R$; $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \forall x \in R$;

b) $\sqrt[3]{e} \approx 1{,}395$; *c*) $15e$.

3. *a*) Să se determine seria Taylor în punctul $a = 1$ asociată funcției: $f : \left(-\frac{1}{3}, \infty\right) \to R,\ f(x) = \ln(3x+1)$;

b) Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f : (-\infty, 1) \to R,\ f(x) = \ln(1-x)$ şi să se precizeze mulțimea pe care este valabilă dezvoltarea găsită;

c) Să se calculeze suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$.

R: *a*) $\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^n}{n\cdot 4^n}\cdot x^n$ **;**

b) $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot x^n, \forall x\in[-1,1)$**;** *c*) $2\ln\frac{5}{3}$.

4. *a*) Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f:R\to R, f(x)=\sin x$. Să se afle valoarea numărului $\sin 1$ cu două zecimale exacte.

b) Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcțiile:

$f_i:R\to R,\ i=\overline{1,3},\ f_1(x)=\sin x^3,\ f_2(x)=\cos^3 x,\ f_3(x)=\sin^3 x$.

R: *a*) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall x\in R$**;** $\sin 1\approx 0{,}84$**;**

b) $\sin x^3=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!}, \forall x\in R$**;** folosind formula

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, obținem: $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x=$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+3^{2n}\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

pentru f_3 se folosește formula $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

5. Să se determine seriile Taylor în punctul $a=-2$ asociate funcțiilor: $f:R\setminus\left\{1,\frac{4}{3}\right\}\to R, f(x)=\frac{4x-1}{3x^2-7x+4}$;

$g:R\setminus\{1,2,3\}\to R,\ g(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

R: $f(x)=\frac{13}{3x-4}-\frac{3}{x-1}$**;** obținem seria Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{13}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^n\right](x+2)^n \ ;$$

$g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)$; rezultă că seria Taylor asociată

este: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+2\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right](x+2)^n$.

6. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcția $f:(-1,\infty)\to R,\ f(x)=\sqrt{1+x}$.

R: $\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n!\cdot 2^n}\cdot x^n,\ \forall x\in(-1,1)$.

Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctelor indicate funcțiile:

7. $f:R\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}\to R,\ f(x)=\frac{1}{1+2x},\ a=0$.

8. $g:R\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}\to R,\ g(x)=\frac{1}{1-3x},\ a=0$.

9. $h:R\to R, h(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, a=0$

10. $f:[-1,1]\to R, f(x)=\arccos x, a=0$

11. $f:R\to R,\ f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), a=0$.

12. $f(x)=\frac{1}{x-2},\ a=0$

13. $f(x)=\frac{1}{x+2},\ a=0$

14. $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2},\ a=0$

15. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-7x+12}, \quad a=0$

16. $f(x)=e^{-\sqrt[3]{x}}, \quad a=0$

17. $f(x)=\sin(2x+1), \; a=0$

18. $f(x)=\sqrt[3]{x}, \; a=1$

19. $f:R\setminus\{-1,-3\}\to R, \; f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}, \; a=-2$

20. $f:R\setminus\{-2,2\}\to R, \; f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}, \; a=3$

21. $f:(-\infty,2)\to R, f(x)=\ln(2-x), \; a=-3$

22. Să se scrie următoarele funcții ca sume ale unor serii de puteri: $a)$ $f(x)=\ln\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)$; $b)$ $f(x)=e^{2x+3}$;

$c)$ $f(x)=(ax+b)^k, a>0; k\in Q\setminus Z$;

$d)$ $f:\left(-\frac{b}{a},\infty\right)\to R, f(x)=\ln(ax+b), \; a>0$.

23. Să se calculeze cu două zecimale exacte numerele:
$a)$ cos 2; $b)$ ln 2; $c)$ arctg 2.

R: $a)$ $-0{,}41$; $b)$ $-0{,}69$; $c)$ $1{,}10$.

CAPITOLUL 8
FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

8.1. LIMITĂ. CONTINUITATE. DERIVATE PARȚIALE. DIFERENȚIABILITATE

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Fie $f : A \subset R^n \to R$ o funcție reală de n variabile reale. Spunem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă pentru orice şir $(x_m)_{m \in N} \subset A,\ x_m \neq x_0$ şi $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = x_0$ avem $\lim\limits_{m \to \infty} f(x_m) = l$.

Definiția 2. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ o funcție reală de două variabile reale şi $(a,b) \in A$. Spunem că f *este continuă în punctul* (a,b) dacă pentru oice şir $\{(x_n, y_n)\}_{n \in N} \subset A$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (a,b)$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(a,b)$.

Definiția 3. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ o funcție reală de două variabile reale şi $(a,b) \in A$.
Spunem că funcția f este *derivabilă parțial în raport cu* x *în punctul* $(a,b) \in A$ dacă $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$ există şi este finită.
Vom nota această limită cu $f'_x(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}$.

Analog, funcția f este *derivabilă parțial în raport cu* y în punctul $(a,b) \in A$ dacă $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$ există şi este finită.

Vom nota această limită cu $f'_y(a,b)$ sau $\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}$.

Definiția 4. Spunem că funcția $f : A \subset R^2 \to R$ este *diferențiabilă în punctul* $(a,b) \in \text{int}\, A$ dacă există două numere reale λ şi μ şi o funcție $\omega : A \to R$, continuă şi nulă în (a,b), astfel încât:

$$f(x,y)-f(a,b)=\lambda(x-a)+\mu(y-b)+\omega(x,y)\cdot\rho(x,y),$$ unde $\rho(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

Propoziția 1. Dacă funcția $f : A \subset R^2 \to R$ este diferențiabilă în punctul $(a,b) \in A$, atunci f admite derivate parțiale $f'_x(a,b)$ şi $f'_y(a,b)$ în punctul (a,b) şi, în plus, $\lambda = f'_x(a,b)$ şi $\mu = f'_y(a,b)$.

Propoziția 2. Dacă funcția $f : A \subset R^2 \to R$ este diferențiabilă în punctul $(a,b) \in A$, atunci f este continuă în (a,b).

Propoziția 3. Dacă funcția $f : A \subset R^2 \to R$ admite derivate parțiale $f'_x(x,y)$ şi $f'_y(x,y)$ într-o vecinătate a punctului $(a,b) \in A$, continue în (a,b), atunci f este diferențiabilă în punctul $(a,b) \in A$.

Definiția 5. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ o funcție diferențiabilă în punctul (a,b) interior lui A.

- Se numeşte *diferențiala de ordinul întâi a funcției* f *în punctul* (a,b) funcția liniară:

$$df(x,y;a,b)=f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)=f'_x(a,b)dx+f'_y(a,b)dy.$$

- Se numeşte *diferențiala de ordinul n a funcției* f *în punctul* (a,b) funcția: $d^n f(x,y;a,b)=\left[\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(n)} f(a,b)$.

Observație. Toate definițiile valabile pentru funcții de două variabile $f: A\subset R^2 \to R$ se pot extinde pentru cazul funcțiilor de n variabile, $f: A\subset R^n \to R$, $n\in N$, $n\geq 3$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se calculeze:

$a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(x^3+y^5)}{x^2+y^4}$; $b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$.

Rezolvare:

$a)$ Fie şirul $(x_n,y_n)\subset R^*\times R^*$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$.

Notăm $f: R^*\times R^* \to R,\ f(x,y)=\frac{tg(x^3+y^5)}{x^2+y^4}$. Avem că:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\frac{tg(x_n{}^3+y_n{}^5)}{x_n{}^2+y_n{}^4}=$$

$$=\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\frac{tg(x_n{}^3+y_n{}^5)}{x_n{}^3+y_n{}^5}\cdot\frac{x_n{}^3+y_n{}^5}{x_n{}^2+y_n{}^4}=1\cdot\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\frac{x_n{}^3+y_n{}^5}{x_n{}^2+y_n{}^4};$$

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\left|\frac{x_n{}^3+y_n{}^5}{x_n{}^2+y_n{}^4}\right|\leq\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\left|\frac{x_n{}^3}{x_n{}^2+y_n{}^4}\right|+\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\left|\frac{y_n{}^5}{x_n{}^2+y_n{}^4}\right|\leq$$

$$\leq\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\left|\frac{x_n{}^3}{x_n{}^2}\right|+\lim_{(x_n,y_n)\to(0,0)}\left|\frac{y_n{}^5}{y_n{}^4}\right|=0\Rightarrow\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x_n{}^3+y_n{}^5}{x_n{}^2+y_n{}^4}=0;$$

prin urmare, conform definiției 1, rezultă că

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(x^3+y^5)}{x^2+y^4}=0.$$

$b)$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{xy}\cdot\frac{xy}{x^2+y^2} =$$

$=1\cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; vom arăta că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

notăm $f : R^* \times R^* \to R,\ f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; considerăm şirurile

$\{(x_n, y_n)\}_{n\in N} \subset R^*\times R^*$ şi $\{(x'_n, y'_n)\}_{n\in N} \subset R^*\times R^*$, astfel

încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n,y'_n)=(0,0)$:

$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, $(x'_n,y'_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$; avem că

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=\frac{1}{2} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} f(x'_n,y'_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}}=\frac{2}{5};$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)\neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n,y'_n)$, rezultă, conform

definiției 1, că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, prin urmare nu

există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$.

2. Să se studieze continuitatea următoarelor funcții de două

variabile: $a)$ $f : R^2 \to R,\ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$;

$b)\ f: R^2 \to R,\ f(x,y) = \begin{cases} \left(1+2xy^2\right)^{\frac{1}{x^3+y^3}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}.$

Rezolvare:

a) f este continuă pe $R^2 \setminus \{(0,0)\}$, fiind rezultatul unor operații algebrice cu funcții elementare, deci continue. Rămâne să studiem continuitatea în punctul $(0,0)$. Avem că:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{3x^2 y}{\sqrt{x^4+y^2}} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2|y|}{\sqrt{x^4+y^2}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2|y|}{\sqrt{x^4}} =$$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| = 0 = f(0,0)$, deci funcția f este continuă și în punctul $(0,0)$, prin urmare este continuă pe R^2.

b) f este continuă pe $R^2 \setminus \{(0,0)\}$, fiind rezultatul unor operații algebrice cu funcții elementare. Rămâne să studiem continuitatea în punctul $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+2xy^2\right)^{\frac{1}{x^3+y^3}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^3+y^3}};$$

demonstrăm că limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^3+y^3}$ nu există. Fie șirul

$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)$; avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2k^2}{n^2}}{\frac{k^3+1}{n^2}} = \frac{2k^2}{k^3+1}$;

deoarece valoarea acestei limite depinde de alegerea lui k, rezultă, conform definiței 1, că nu există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^3+y^3}$ și implicit nu

există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, deci f nu este continuă în punctul $(0,0)$.

3. Folosind definiția, să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi în punctul $(3,2)$ ale funcției

$f:(0,\infty)\times R\to R,\quad f(x,y)=x^y$.

Rezolvare:

$$f'_x(3,2)=\lim_{x\to3}\frac{f(x,2)-f(3,2)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x^2-3^2}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=6.$$

$$f'_y(3,2)=\lim_{y\to2}\frac{f(3,y)-f(3,2)}{y-2}=\lim_{y\to2}\frac{3^y-3^2}{y-2}=$$

$$=\lim_{y\to2}\frac{3^2(3^{y-2}-1)}{y-2}=9\lim_{y\to2}\frac{3^{y-2}-1}{y-2}=9\ln3.$$

4. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi şi doi ale funcției $f:R^2\to R,\quad f(x,y)=kx^\alpha y^\beta;\ k,\ \alpha,\ \beta\in R.$

Rezolvare:

$f'_x(x,y)=k\alpha x^{\alpha-1}y^\beta;\quad f'_y(x,y)=kx^\alpha\beta y^{\beta-1}.$

$f''_{x^2}(x,y)=k\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^\beta;$

$f''_{xy}(x,y)=k\alpha x^{\alpha-1}\beta y^{\beta-1}=f''_{yx}(x,y);$

$f''_{y^2}(x,y)=kx^\alpha\beta(\beta-1)y^\beta.$

Observație. Pentru $k>0,\ \alpha\geq0,\ \beta\geq0$, funcția

$f:R^2\to R,\quad f(x,y)=kx^\alpha y^\beta$ se numeşte *funcția de producție Cobb-Douglas.*

5. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției

$$f : R^2 \to R, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

Rezolvare:

- Pentru $(x,y) \neq (0,0)$ avem:

$$f'_x(x,y) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Analog, obținem $f'_y(x,y) = \dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

- Pentru a determina derivatele parțiale în punctul $(0,0)$ vom folosi definiția:

$$f'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = \lim_{x \to 0} 0 = 0.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = \lim_{y \to 0} 0 = 0.$$

Rezultă: $f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases};$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

6. Folosind definiția, să se arate că funcția $f: R^2 \to R$, $f(x,y) = 4x^2 - 3y$ este diferențiabilă în punctul $(1,-2)$.

Rezolvare:

Funcția f este diferențiabilă în punctul $(1,-2)$ dacă există $\lambda, \mu \in R$ și o funcție $\omega: R^2 \to R$, continuă și nulă în $(1,-2)$, astfel încât: $f(x,y) - f(1,-2) = \lambda(x-1) + \mu(y+2) + \omega(x,y) \cdot \rho(x,y)$, unde $\rho(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$. Conform propoziției 1 din breviarul teoretic, avem că dacă f este diferențiabilă în punctul $(1,-2)$, atunci $\lambda = f'_x(1,-2) = 8$ și $\mu = f'_y(1,-2) = -3$.

Astfel, relația din definiție devine:

$$4x^2 - 3y - 10 = 8(x-1) - 3(y+2) + \omega(x,y) \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$$

Pentru $(x,y) \neq (1,-2)$ rezultă că

$$\omega(x,y) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}} = \frac{4(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}},$$ iar pentru $(x,y) = (1,-2)$ vom considera $\omega(x,y) = 0$ (pentru ca funcția $\omega(x,y)$ să se anuleze în punctul $(1,-2)$).

Avem că $$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \omega(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{4(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}} \leq$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{4(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2}} = 0 = \omega(1,-2),$$ deci funcția ω este continuă în punctul $(1,-2)$.

În concluzie, există $\lambda = 8$, $\mu = -3$ și funcția $\omega: R^2 \to R$,

$$\omega(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}, & (x,y)\neq(1,-2)\\ 0, & (x,y)=(1,-2)\end{cases}$$, continuă şi nulă

în $(1,-2)$, astfel încât

$f(x,y)-f(1,-2)=\lambda(x-1)+\mu(y+2)+\omega(x,y)\cdot\rho(x,y),\ \forall(x,y)\in R^2.$

Conform definiției 4, rezultă că funcția f este diferențiabilă în punctul (1,-2).

7. Să se studieze diferențiabilitatea următoarelor funcții în punctele indicate:

a) $f:R^2\to R,\quad f(x,y)=\sqrt{3(x-1)^2+5y^4}$ în punctul $(1,0)$;

b) $f:R^2\to R,\quad f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sin x}}, & (x,y)\neq(0,2)\\ 0, & (x,y)\neq(0,2)\end{cases}$ în $(0,2)$;

c) $f:R^2\to R,\quad f(x,y)=e^{x\sin y}$ în punctul $(-3,4)$.

Rezolvare:

a) Dacă f este diferențiabilă în punctul $(1,0)$, atunci rezultă, în baza propoziției 1, că există $f'_x(1,0)$ şi $f'_y(1,0)$.

Calculăm $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3(x-1)^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3}|x-1|}{x-1}$;

cum limitele laterale sunt diferite, rezultă că nu există $f'_x(1,0)$, ceea ce contrazice propoziția 1. Prin urmare, f nu este diferențiabilă în punctul $(1,0)$.

b) Dacă f ar fi diferențiabilă în punctul $(0,2)$, atunci, în baza propoziției 2 ar rezulta că f este continuă în punctul $(0,2)$.

Avem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} (1+xy)^{\frac{1}{\sin x}} =$

$= e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{xy}{\sin x}} = e^2 \neq 0 = f(0,2)$, deci f nu este continuă în punctul $(0,2)$, ceea ce contrazice propoziția 2. Prin urmare, f nu este diferențiabilă în punctul $(0,2)$.

c) În baza propoziției 3, deducem că o condiție suficientă pentru diferențiabilitatea funcției f este ca funcția f să admită derivate parțiale $f'_x(x,y)$ și $f'_y(x,y)$ într-o vecinătate a punctului $(-3,4)$, continue în $(-3,4)$.

Calculăm $f'_x(x,y) = e^{x\sin y} \cdot \sin y$ și $f'_y(x,y) = e^{x\sin y} \cdot x\cos y$.

Aceste funcții există și sunt continue pe R^2, deci și pe o vecinătate a punctului $(-3,4)$. Rezultă că funcția f este diferențiabilă în punctul $(-3,4)$.

8. Să se scrie diferențialele de ordinul întâi și doi în punctul $(1,2)$ ale funcției $f : D \to R,\ f(x,y) = \ln\left(1 - xy + y^2\right)$, unde $D = \left\{(x,y) \in R^2 / 1 - xy + y^2 > 0\right\}$.

Rezolvare:

- $f'_x(x,y) = \dfrac{-y}{1 - xy + y^2}$; $f'_y(x,y) = \dfrac{-x + 2y}{1 - xy + y^2}$;

$f'_x(1,2) = -\dfrac{2}{3}$; $f'_y(1,2) = 1$.

$df(x,y;1,2) = f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2) = -\frac{2}{3}(x-1) + (y-2)$

sau $df(x, y;1,2) = -\frac{2}{3}dx + dy$.

- $f''_{x^2}(x, y) = \dfrac{-y^2}{(1-xy+y^2)^2}$;

$f''_{y^2}(x, y) = \dfrac{-x^2-2y^2+2xy+2}{(1-xy+y^2)^2}$; $f''_{xy}(x, y) = \dfrac{y^2-1}{(1-xy+y^2)^2}$;

$f''_{x^2}(1,2) = -\frac{4}{9}$; $f''_{y^2}(x,\ ) = -\frac{1}{3}$; $f''_{xy}(1,2) = \frac{1}{3}$.

$d^2f(x, y;1,2) = f''_{x^2}(1,2)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) +$

$+f''_{y^2}(1,2)(y-2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2f(x, y;1,2) = -\frac{4}{9}(x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)(y-2) - \frac{1}{3}(y-2)^2$ sau

$d^2f(x, y;1,2) = -\frac{4}{9}dx^2 + \frac{2}{3}dxdy - \frac{1}{3}dy^2$.

9. Să se scrie diferenţialele de ordinul întâi şi doi ale funcţiei $f : R^3 \to R,\ f(x, y, z) = e^{ax+by+cz}$.

Rezolvare:

- $f'_x(x, y, z) = ae^{ax+by+cz}$; $f'_y(x, y, z) = be^{ax+by+cz}$;

$f'_z(x, y, z) = ce^{ax+by+cz}$;

$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz$;

$df(x, y, z) = ae^{ax+by+cz}dx + be^{ax+by+cz}dy + ce^{ax+by+cz}dz$.

- $f''_{x^2}(x, y, z) = a^2e^{ax+by+cz}$; $f''_{y^2}(x, y, z) = b^2e^{ax+by+cz}$;

$f''_{z^2}(x,y,z)=c^2e^{ax+by+cz}$; $f''_{xy}(x,y,z)=abe^{ax+by+cz}$;

$f''_{xz}(x,y,z)=ace^{ax+by+cz}$; $f''_{yz}(x,y,z)=bce^{ax+by+cz}$.

$$d^2f(x,y,z)=f''_{x^2}(x,y,z)dx^2+f''_{y^2}(x,y,z)dy^2+f''_{z^2}(x,y,z)dz^2+$$
$$+2f''_{xy}(x,y,z)dxdy+2f''_{xz}(x,y,z)dxdz+2f''_{yz}(x,y,z)dydz.$$

După înlocuire, rezultă:

$$d^2f(x,y,z)=(adx+bdy+cdz)^2e^{ax+by+cz}.$$

10. Să se scrie diferențiala de ordinul n pentru funcția:

$f:R^3\to R,\ f(x,y,z)=e^{ax+by+cz}$.

Rezolvare:

Folosind rezultatul problemei precedente şi aplicând inducția matematică, obținem:

$$d^nf(x,y,z)=(adx+bdy+cdz)^ne^{ax+by+cz}.$$

PROBLEME PROPUSE

1. Să se calculeze limitele funcțiilor :

$a)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$; $b)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$; $c)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\sin\dfrac{1}{y}$;

$d)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}y\cos\dfrac{1}{x}$; $e)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x^2+3y^2}{xy}$; $f)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^4}{x^4+y^8}$;

$g)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{5(x^2+y^2)}$; $h)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$; $i)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

$j)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; $k)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}$; $l)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$;

$m)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; $n)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^8}$; $o)\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$.

R: $a)$ pentru $(x_n,\ y_n)=\left(\frac{1}{n},\ \frac{k}{n}\right)\to(0,\ 0)$, $k\neq -1$, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\frac{1-k}{1+k}$ depinde de alegerea lui k, deci limita nu există; $b)$ nu există; $c)$ 0; $d)$ 0; $e)$ nu există; $f)$ pentru $(x_n,\ y_n)=\left(\frac{1}{n^2},\ \frac{k}{n}\right)\to(0,\ 0)$, obținem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\frac{k^4}{k^8+1}$ depinde de alegerea lui k, deci limita nu există; $g)$ $\frac{1}{20}$; $h)$ nu există; $i)$ nu există; $j)$ 0; $k)$ 0; $l)$ 0; $m)$ ∞; $n)$ ∞; $o)$ 0.

2. Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

$$a) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1+x^2+y^2}}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ -\dfrac{1}{2}, x=y=0\end{cases};$$

$$b) f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, (x,y)\neq(0,\ 0)\\ \alpha, \quad (x,y)=(0,\ 0)\end{cases};$$

$$c) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{2x^2+3y^2},\ (x,y)\neq(0,0)\\ 1,\quad (x,y)=(0,0)\end{cases};$$

$$d)\, f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}}, & (x,y)\in\left(R\setminus\{0\}\right)\times R \\ 0, & (x,y)\in\{0\}\times R \end{cases};$$

$$e)\, f(x,y)=\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{xy}, & (x,y)\in(R\setminus\{0\})\times(R\setminus\{0\}) \\ 0, & (x,y)\in R\times\{0\}\cup\{0\}\times R \end{cases};$$

$$f)\, f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+2y}{x+3y}, & (x,\ y)\in R^2\setminus\{(-3\alpha,\ \alpha),\ \alpha\in R\} \\ 1, & (x,\ y)\in\{(-3\alpha,\ \alpha),\ \alpha\in R\} \end{cases}.$$

R: $a)$ f continuă pe R^2; $b)$ dacă $\alpha=1$, atunci f continuă pe R^2; dacă $\alpha\neq1$, atunci f continuă pe $R^2\setminus\{(0,\ 0)\}$; $c)$ f continuă pe $R^2\setminus\{(0,\ 0)\}$; $d)$ f continuă pe $R^2\setminus\{(0,\ 0)\}$; $e)$ f continuă pe R^2; $f)$ f continuă pe $R^2\setminus\{(-3\alpha,\ \alpha),\ \alpha\in R\}$.

3. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcțiilor:

$a)$ $f:R^2\to R,\quad f(x,y)=x^3-3xy^4+5x^2y-12y$;

$b)$ $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$;

$c)$ $f:R^2\to R,\quad f(x,y)=\ln(3+x^2+2y^4)$;

$d)$ $f(x,y)=xy+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y};x\neq0,\ y\neq0$;

$e)$ $f(x,y)=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$;

$f)$ $f(x,y)=x^y,\ x>0$;

$g)\ f: R^2 \to R,\quad f(x,y)=\dfrac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$;

$h)\ f: R^2 \to R,\quad f(x,y)=(3x+2y^2)\sin(xy)$;

$i)\ f: R^2 \to R,\quad f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$;

$j)\ f: R^3 \to R,\quad f(x,y,z)=(3y^2-5z)e^{5x+z^2}$.

R: $a)\ f'_x(x,y)=3x^2-3y^4+10xy$;

$f'_y(x,y)=-12xy^3+5x^2-12$; $f''_{x^2}(x,y)=6x+10y$;

$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=-12y^3+10x$; $f''_{y^2}(x,y)=-36xy^2$; j)

$f'_x(x,y,z)=5(3y^2-5z)e^{5x+z^2}$; $f'_y(x,y,z)=6y\,e^{5x+z^2}$;

$f'_z(x,y,z)=(6y^2z-10z^2-5)e^{5x+z^2}$;

$f''_{x^2}(x,y,z)=25(3y^2-5z)e^{5x+z^2}$; $f''_{y^2}(x,y,z)=6\,e^{5x+z^2}$;

$f''_{z^2}(x,y,z)=(12y^2z^2-20z^3-30z+6y^2)e^{5x+z^2}$;

$f''_{xy}(x,y,z)=f''_{yx}(x,y,z)=30y\,e^{5x+z^2}$;

$f''_{xz}(x,y,z)=f''_{zx}(x,y,z)=5(6y^2z-10z^2-5)e^{5x+z^2}$;

$f''_{yz}(x,y,z)=f''_{zy}(x,y,z)=12yz\,e^{5x+z^2}$.

4. Folosind definiția, să se arate că funcția $f: R^2 \to R$, $f(x,y)=3x-5y^3$, este diferențiabilă în punctul $(3,-1)$.

5. Să se studieze diferențiabilitatea următoarelor funcții în punctele indicate:

$a)\ f: R^2 \to R,\ f(x,y)=\sqrt{2(x+1)^2+3(y-2)^4}$ în $(-1,2)$;

$b)\ f: R^2 \to R,\quad f(x,y)=\begin{cases}(1+xy)^{\frac{1}{arctgy}}, & (x,y)\neq(3,0)\\ 0, & (x,y)=(3,0)\end{cases}$ în $(3,0)$;

$c)\ f: R^2 \to R,\quad f(x,y)=(1+x^2)^{\sin y}$ în punctul $(-3,4)$.

R: $a)$ f nu este diferențiabilă în punctul $(-1,2)$; $b)$ f nu este diferențiabilă în punctul $(3,0)$; $c)$ f este diferențiabilă în punctul $(-3,4)$.

6. Să se scrie diferențialele de ordinul întâi şi doi în punctul $(-1,1)$ ale funcțiilor de la problema 3.

7. Să se arate că funcția :

$a) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, (x,y)=(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$ este:

- discontinuă în punctul $(0,0)$
- continuă în $(0,0)$ în raport cu x
- continuă în $(0,0)$ în raport cu y

$b) f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ este :

- continuă
- are derivate parțiale în origine
- nu este diferențiabilă în origine

$c) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, x=y=0\end{cases}$ este

- continuă pe R^2

- are derivate parțiale pe R^2
- nu este diferențiabilă pe R^2

8. Studiați diferențiabilitatea următoarelor funcții în punctul $(0,\ 0)$:

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{2x^2+4y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases};\ b)\ f(x,y)=x\sqrt{|y|}.$$

R: $a)$ Deoarece funcția nu este continuă în punctul $(0,\ 0)$, rezultă că f nu este diferențiabilă în acest punct; $b)$ deoarece nu există $f'_y(0,\ 0)$, rezultă că f nu este diferențiabilă în $(0,\ 0)$.

9. Să se scrie diferențialele de ordinul întâi şi doi ale funcțiilor:

$a)\ f:R^3\to R,\ f(x,y,z)=3xy^2-2x^2yz^3+4xz-5y^3+1$;

$b)\ f:R^3\to R,\ f(x,y,z)=\sin(ax+by+cz)$;

$c)\ f:R^3\to R,\ f(x,y,z)=\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$.

10. Să se scrie diferențiala de ordinul n pentru funcțiile:

$a)\ f:R^2\to R,\ f(x,y)=e^{\alpha x+\beta y}$;

$b)\ f:R^2\to R,\ f(x,y)=\sin(ax+by)$;

$c)\ f:R^3\to R,\ f(x,y,z)=\cos(ax+by+cz)$;

$d)\ f:D\to R,\ f(x,y,z)=\ln(ax+by+cz)$,

$D=\{(x,y,z)\in R^3\ /\ ax+by+cz>0\}$.

R: $a)\ d^n f(x,y)=(adx+bdy)^n e^{ax+by}$;

$b)\ d^n f(x,y)=(adx+bdy)^n \sin\left(ax+by+n\frac{\pi}{2}\right)$;

$c)\ d^n f(x,y,z)=(adx+bdy+cdz)^n \cos\left(ax+by+cz+n\frac{\pi}{2}\right)$.

8.2. EXTREMELE FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

8.2.1. EXTREME LIBERE

BREVIAR TEORETIC

Definiția 1. Funcția $f : A \subset R^n \to R$ admite un *maxim local (minim local)* în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât oricare ar fi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V \cap A$ are loc inegalitatea $f(x) \leq f(a)$ (respectiv $f(x) \geq f(a)$). În aceste condiții, spunem că punctul a este *punct de extrem local* pentru funcția f. Dacă inegalitățile de mai sus sunt verificate pe tot domeniul de definiție A, spunem că punctul a este *punct de maxim (minim) global* pentru funcția f.

Definiția 2. Fie $f : A \subset R^n \to R$. Punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \text{int}\, A$ este *punct staționar* pentru funcția f dacă f este diferențiabilă în a şi diferențiala $df(x; a) = 0$.
Observație. Dacă punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \text{int}\, A$ este punct staționar, $df(x; a) = 0$ implică $f'_{x_k}(a) = 0, \ \forall k = \overline{1, n}$.

Propoziție. Dacă funcția $f : A \subset R^n \to R$ admite un extrem local în punctul $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in A$ şi există f'_{x_k} într-o vecinătate a punctului a, $\forall k = \overline{1, n}$, atunci $f'_{x_k}(a) = 0, \ \forall k = \overline{1, n}$

Teorema 1. Fie $f : A \subset R^2 \to R$ şi $(a, b) \in \text{int}\, A$ un punct staționar pentru f. Presupunem că f admite derivate parțiale de ordinul doi, continue într-o vecinătate V a punctului (a, b). Considerăm

expresia $\Delta(a,b)=\left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 - f''_{x^2}(a,b)\cdot f''_{y^2}(a,b)$. Atunci:

1. Dacă $\Delta(a,b)<0$, atunci (a,b) este punct de extrem local,

şi anume: - punct de minim local, dacă $f''_{x^2}(a,b)>0$;

- punct de maxim local, dacă $f''_{x^2}(a,b)<0$.

2. Dacă $\Delta(a,b)>0$, atunci (a,b) este punct şa.

Teorema 2. Fie $f: A\subset R^n \to R$. Presupunem că punctul $a\in A$ este punct staționar pentru f şi funcția f are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate V a punctului a. Atunci:

1) dacă $d^2 f(x;a)<0$, pentru orice $x\in V\cap A$, atunci a este punct de maxim local;

2) dacă $d^2 f(x;a)>0$, pentru orice $x\in V\cap A$, atunci a este punct de minim local;

3) dacă $d^2 f(x;a)$ este nedefinită, atunci a este punct şa.

Algoritm de determinare a punctelor de extrem local pentru o funcție $f: A\subset R^n \to R$

Etapa 1. Determinăm punctele staționare, care sunt soluțiile

sistemului:
$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ f'_{x_2}(x_1,x_2,...,x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_{x_n}(x_1,x_2,...,x_n)=0 \end{cases}$$

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local. Acest lucru se poate realiza în mai multe moduri:

Metoda I. Pentru fiecare punct staționar $P(a_1,a_2,...,a_n)$ calculăm matricea hessiană:

$$H(a_1,a_2,...,a_n)=\begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(a_1,..,a_n) & f''_{x_1x_2}(a_1,..,a_n) & \cdots & f''_{x_1x_n}(a_1,..,a_n) \\ f''_{x_2x_1}(a_1,..,a_n) & f''_{x_2^2}(a_1,..,a_n) & \cdots & f''_{x_2x_n}(a_1,..,a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{x_nx_1}(a_1,..,a_n) & f''_{x_nx_2}(a_1,..,a_n) & \cdots & f''_{x_n^2}(a_1,..,a_n) \end{pmatrix}$$

şi minorii Δ_1, $\Delta_2,......,\Delta_n$ ai acesteia, unde Δ_i este minorul format din primele i linii şi i coloane ale matricei $H(a,b)$, $i=\overline{1,n}$.

Discuție.

- Dacă toți minorii $\Delta_i > 0$, atunci $P(a_1,a_2,...,a_n)$ este punct de minim local.
- Dacă minorii Δ_i alternează ca semn, începând cu minus, atunci $P(a_1,a_2,...,a_n)$ este punct de maxim local.
- Orice altă combinație de semne, cu $\Delta_i \neq 0$, implică $P(a_1,a_2,...,a_n)$ punct şa.

Metoda II. (pentru funcțiile de două variabile)

Pentru fiecare punct staționar $P(a,b)$ calculăm expresia:

$$\Delta(a,b)=\left[f''_{xy}(a,b)\right]^2 - f''_{x^2}(a,b)\cdot f''_{y^2}(a,b).$$

1. Dacă $\Delta(a,b)<0$, atunci (a,b) este punct de extrem local, şi anume:

   - punct de minim local, dacă $f''_{x^2}(a,b)>0$;
   - punct de maxim local, dacă $f''_{x^2}(a,b)<0$.

2. Dacă $\Delta(a,b)>0$, atunci (a,b) este punct şa.

Observația 1. În cazul funcțiilor de două variabile, $\Delta(a,b)=-\Delta_2$. Prin urmare, dacă $\Delta_2<0$, atunci rezultă că $\Delta(a,b)>0$, deci (a,b) este punct şa.

Metoda III. Se calculează diferențiala de ordinul al doilea a funcției în punctul staționar $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ şi se aplică teorema 2.

Observația 2. Existența unui punct de extrem local poate fi pusă în evidență cu ajutorul metodelor prezentate numai dacă funcția f este diferențiabilă în acel punct şi admite derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a punctului respectiv.
În caz contrar sau în cazul în care prin aplicarea metodelor de mai sus nu se poate stabili natura punctului, se foloseşte:

Metoda IV. Definiția punctului de extrem local.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^2 \to R,\ f(x, y) = 6x^2 y + 2y^3 - 45x - 51y + 7$.

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staționare, care sunt soluțiile sistemului: $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$

Avem că: $\begin{matrix} f'_x(x, y) = 12xy - 45 \\ f'_y(x, y) = 6x^2 + 6y^2 - 51 \end{matrix}$, prin urmare obținem sistemul:

$$\begin{cases} 12xy - 45 = 0 \\ 6x^2 + 6y^2 - 51 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{15}{4} \\ x^2 + y^2 = \frac{17}{2} \end{cases}$$

Notăm $x + y = S,\ xy = P \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{15}{4} \\ S^2 - 2P = \frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{15}{4} \\ S = \pm 4 \end{cases}$

Pentru $S = 4,\ P = \frac{15}{4} \Rightarrow t^2 - 4t + \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{5}{2}$, deci

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} \\ y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Pentru $S = -4,\ P = \frac{15}{4} \Rightarrow t^2 + 4t + \frac{15}{4} = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{2},\ t_2 = -\frac{5}{2}$,

deci $\begin{cases} x_3 = -\frac{3}{2} \\ y_3 = -\frac{5}{2} \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_4 = -\frac{5}{2} \\ y_4 = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Am obținut punctele staționare:

$P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $P_4\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local.

Metoda I. Scriem matricea hessiană:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Avem: $f''_{x^2}(x,y) = \left[f'_x(x,y)\right]'_x = 12y$;

$f''_{xy}(x,y) = \left[f'_x(x,y)\right]'_y = 12x = f''_{yx}(x,y)$;

$f''_{y^2}(x,y) = \left[f'_y(x,y)\right]'_y = 12y$, deci

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12y & 12x \\ 12x & 12y \end{pmatrix}.$$

$H\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 30 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 18 & 30 \end{vmatrix} = 576 > 0$, prin urmare $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ este punct de minim local.

$H\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 18 & 30 \\ 30 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = 18 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 18 & 30 \\ 30 & 18 \end{vmatrix} = -576 < 0$, prin

urmare $P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ este punct şa.

$H\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)=\begin{pmatrix}-30 & -18\\ -18 & -30\end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1=-30<0, \Delta_2=\begin{vmatrix}-30 & -18\\ -18 & -30\end{vmatrix}=576>0$,

prin urmare $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ este punct de maxim local.

$H\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)=\begin{pmatrix}-18 & -30\\ -30 & -18\end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1=-18<0, \Delta_2=\begin{vmatrix}-18 & -30\\ -30 & -18\end{vmatrix}=-576<0$,

prin urmare $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ este punct şa.

Metoda II. Calculăm expresia:

$$\Delta(x,y)=\left[f''_{xy}(x,y)\right]^2-f''_{x^2}(x,y)\cdot f''_{y^2}(x,y)$$

şi obţinem $\Delta(x,y)=144\left(x^2-y^2\right)$. Avem că:

$\Delta\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)<0$ şi $f''_{x^2}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)>0$, deci $P_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ punct de minim local.

$\Delta\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)>0$, prin urmare $P_2\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ este punct şa.

$\Delta\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)<0$ şi $f''_{x^2}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)<0$, deci $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ punct de maxim local.

$\Delta\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)>0$, prin urmare $P_4\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ este punct şa.

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei:

$f:(0, \infty)^2 \to R,\ f(x,y)=x^2+y^2+3xy-8\ln x-14\ln y+5$.

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staţionare. Avem că:

$f'_x(x,y)=2x+3y-\frac{8}{x}$

$f'_y(x,y)=2y+3x-\frac{14}{y}$

. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-\frac{8}{x}=0 \\ 2y+3x-\frac{14}{y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+3xy=8 & (1) \\ 2y^2+3xy=14 & (2) \end{cases}.$$

Am obținut un sistem omogen. Înmulțim prima ecuație cu 14, pe cea de-a doua cu (-8) şi adunăm relațiile obținute; rezultă:

$28x^2+18xy-16y^2=0 \Leftrightarrow 14x^2+9xy-8y^2=0$. Împărțim această ecuație prin y^2 $(y^2 \neq 0)$ şi notăm $\frac{x}{y}=t$. Obținem:

$14t^2+9t-8=0 \Rightarrow t_1=-\frac{8}{7},\ t_2=\frac{1}{2}$. Rădăcina negativă nu convine, deoarece $x>0$ şi $y>0$, prin urmare avem $t=\frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=2x$.

Înlocuind $y=2x$ în (1), rezultă $x=\pm 1$. Cum $x>0$, rezultă că singura valoare care se acceptă este $x=1$, de unde obținem $y=2$. Am obținut un singur punct staționar: $P(1,\ 2)$.

Etapa 2. Stabilim dacă acesta este punct de extrem local.

Avem: $f''_{x^2}(x,y)=\left[f'_x(x,y)\right]'_x=2+\frac{8}{x^2}$;

$f''_{xy}(x,y)=\left[f'_x(x,y)\right]'_y=3=f''_{yx}(x,y)$;

$f''_{y^2}(x,y)=\left[f'_y(x,y)\right]'_y=2+\frac{14}{y^2}$, deci matricea hessiană este:

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+\frac{8}{x^2} & 3 \\ 3 & 2+\frac{14}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Avem că $H(1,\ 2)=\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1=10>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & \frac{11}{2} \end{vmatrix}=46>0$,

prin urmare $P(1,\ 2)$ este punct de minim local.

3. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f:\left(R^*\right)^3 \to R, f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{4}+\frac{z}{x}+\frac{1}{z}$.

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staționare. Avem că:

$f'_x(x,y,z)=\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}$

$f'_y(x,y,z)=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{4}$, de unde rezultă sistemul: $\begin{cases} \frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}=0 \\ -\frac{x}{y^2}+\frac{1}{4}=0 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{z^2}=0 \end{cases}$,

$f'_z(x,y,z)=\frac{1}{x}-\frac{1}{z^2}$

echivalent cu $\begin{cases} x^2=yz \\ 4x=y^2 \\ z^2=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z^2 \\ y^2=4z^2 \\ z^4=yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z^2 \\ y^2=4z^2 \\ z^4=yz \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=z^2 \\ y=\pm 2z \\ z^3=y \end{cases}$; am folosit că $x,y,z\in R^*$.

Pentru $y=2z \Rightarrow z^3=2z \Rightarrow z=\pm\sqrt{2}, y=\pm 2\sqrt{2}, x=2$.

Pentru $y=-2z \Rightarrow z^3=-2z \Rightarrow z=0$ (nu convine) sau $z^2=-2 \Rightarrow z\notin R$.

Am obținut punctele staționare $P_1(2,2\sqrt{2},\sqrt{2})$ şi $P_2(2,-2\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

Etapa 2. Stabilim natura punctelor staționare, folosind matricea hessiană.

$f''_{x^2}(x,y,z)=\frac{2z}{x^3}$; $\quad f''_{y^2}(x,y,z)=\frac{2x}{y^3}$ $\quad f''_{z^2}(x,y,z)=\frac{2}{z^3}$

$$f''_{xy}(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} = f''_{yx}(x,y,z);$$

$$f''_{xz}(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} = f''_{zx}(x,y,z);\ \ f''_{yz}(x,y,z) = 0 = f''_{zy}(x,y,z)$$

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y,z) & f''_{xy}(x,y,z) & f''_{xz}(x,y,z) \\ f''_{yx}(x,y,z) & f''_{y^2}(x,y,z) & f''_{yz}(x,y,z) \\ f''_{zx}(x,y,z) & f''_{zy}(x,y,z) & f''_{z^2}(x,y,z) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2z}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & -\frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & 0 & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}, \text{ deci } H(2,2\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Avem că $\Delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$; $\quad \Delta_2 = \frac{3}{64} > 0$; $\quad \Delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{64} > 0$, prin urmare $P_1(2,2\sqrt{2},\sqrt{2})$ este punct de minim local.

$$H\left(2,-2\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{8} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} < 0$; $\quad \Delta_2 = \frac{3}{64} > 0$; $\quad \Delta_3 = -\frac{\sqrt{2}}{64} < 0$, prin urmare $P_2(2,-2\sqrt{2},-\sqrt{2})$ este punct de maxim local.

4. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^2 \to R, f(x,y) = xy\left(x^2 + y^2 - 4\right).$

Rezolvare:

Funcția f se mai poate scrie: $f(x,y) = x^3y + xy^3 - 4xy$.

Etapa 1. Determinăm punctele staționare. Avem că:

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 3x^2y + y^3 - 4y \\ f_y'(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2y + y^3 - 4y = 0 \\ x^3 + 3xy^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(3x^2 + y^2 - 4\right) = 0 \\ x\left(x^2 + 3y^2 - 4\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Cazul a) $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1(0,\ 0).$

Cazul b) $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow P_2(-2,\ 0);\ P_3(2,\ 0).$

Cazul c) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow P_4(0,\ -2);\ P_5(0,\ 2).$

Cazul d) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 3y^2 = 4 \end{cases}$; înmulțim prima relație cu (-3) și apoi o

adunăm cu cealaltă; obținem: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$;
pentru $x = -1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow P_6(-1,\ -1);\ P_7(-1,\ 1)$;
pentru $x = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow P_8(1,\ -1);\ P_9(1,\ 1)$.

Am obținut punctele staționare:
$P_1(0,\ 0),\ P_2(-2,\ 0),\ P_3(2,\ 0),\ P_4(0,\ -2),\ P_5(0,\ 2),$
$P_6(-1,\ -1);\ P_7(-1,\ 1),\ P_8(1,\ -1);\ P_9(1,\ 1).$

Etapa 2. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local.

$f''_{x^2}(x,y) = 6xy$; $f''_{y^2}(x,y) = 6xy$; $f''_{xy}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 4$.

- Matricea hessiană: $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2+3y^2-4 \\ 3x^2+3y^2-4 & 6xy \end{pmatrix}$.

Calculăm $H(0,\ 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$; avem că $\Delta_1 = 0$, prin urmare *natura punctului nu se poate preciza folosind matricea hessiană.*

- În acest caz, calculăm expresia:

$\Delta(x,y) = \left[f''_{xy}(x,y)\right]^2 - f''_{x^2}(x,y)\cdot f''_{y^2}(x,y)$ şi obținem

$\Delta(x,y) = \left(3x^2 + 3y^2 - 4\right)^2 - 36x^2y^2$. Avem că:

$\Delta(0,0) = 16 > 0$, prin urmare $P_1(0,\ 0)$ este punct şa.

$\Delta(-2,0) = 64 > 0$, deci $P_2(-2,\ 0)$ este punct şa.

$\Delta(2,0) = 64 > 0$, deci $P_3(2,\ 0)$ este punct şa.

$\Delta(0,-2) = 64 > 0$, deci $P_4(0,-2)$ este punct şa.

$\Delta(0,2) = 64 > 0$, deci $P_5(0,2)$ este punct şa.

$\Delta(-1,-1) = -32 < 0$ şi $f''_{x^2}(-1,-1) = 6 > 0$ deci $P_6(-1,\ -1)$ este punct de minim local.

$\Delta(-1,1) = -32 < 0$ şi $f''_{x^2}(-1,-1) = -6 < 0$ deci $P_7(-1,\ 1)$ este punct de maxim local.

$\Delta(1,-1) = -32 < 0$ şi $f''_{x^2}(1,-1) = -6 < 0$ deci $P_8(1,\ -1)$ este punct de maxim local.

$\Delta(1,1) = -32 < 0$ şi $f''_{x^2}(1,1) = 6 > 0$ deci $P_9(1,\ 1)$ este punct de minim local.

5. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^3 \to R, f(x,y,z) = x^4 + y^3 + z^2 + 4xz - 3y + 2$.

Rezolvare:
Etapa 1. Determinăm punctele staționare. Avem că:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y,z) &= 4x^3 + 4z \\ f'_y(x,y,z) &= 3y^2 - 3 \\ f'_z(x,y,z) &= 2z + 4x \end{aligned}$$

, de unde rezultă sistemul: $\begin{cases} 4x^3 + 4z = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \\ 2z + 4x = 0 \end{cases}$,

echivalent cu $\begin{cases} y^2 = 1 \\ z = -2x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,2} = \pm 1 \\ x_1 = 0;\ x_{2,3} = \pm\sqrt{2} \\ z_1 = 0;\ z_{2,3} = \mp 2\sqrt{2} \end{cases}$

Am obținut punctele staționare $P_1(0,1,0)$, $P_2(0,-1,0)$, $P_3(\sqrt{2},1,-2\sqrt{2})$, $P_4(\sqrt{2},-1,-2\sqrt{2})$, $P_5(-\sqrt{2},1,2\sqrt{2})$, $P_6(-\sqrt{2},-1,2\sqrt{2})$.

Etapa 2. Stabilim natura punctelor staționare, folosind matricea hessiană.

$f''_{x^2}(x,y,z)=12x^2$ $\qquad f''_{y^2}(x,y,z) = 6y$ $\qquad f''_{z^2}(x,y,z)=2$

$f''_{xy}(x,y,z) = 0 = f''_{yx}(x,y,z)$; $\qquad f''_{xz}(x,y,z) = 4 = f''_{zx}(x,y,z)$;

$f''_{yz}(x,y,z) = 0 = f''_{zy}(x,y,z)$

- Matricea hessiană este: $H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 & 4 \\ 0 & 6y & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$H(0,1,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$; avem că $\Delta_1 = 0$, prin urmare nu se poate stabili natura punctului $P_1(0,1,0)$ folosind matricea hessiană.

- De aceea vom studia semnul diferențialei de ordinul al doilea a funcției în punctul $P_1(0,1,0)$. Avem că:

$d^2 f((x,y,z);(x_0,y_0,z_0)) = 12x_0^2\, dx^2 + 6y_0\, dy^2 + 2dz^2 + 8dxdz$.

$d^2 f((x,y,z);(0,1,0)) = 6dy^2 + 2dz^2 + 8dxdz$. Pentru a afla semnul acestei expresii, folosim metoda lui Gauss de reducere la forma canonică a unei funcționale pătratice. Obținem:

$d^2 f((x,y,z);(0,1,0)) = 6dy^2 + 2\left(dz^2 + 4dxdz + 4dx^2\right) - 8dx^2 =$
$= 6dy^2 + 2(dz+2dx)^2 - 8dx^2$, deci $d^2 f((x,y,z);(0,1,0))$ este nedefinită, prin urmare $P_1(0,1,0)$ este punct şa.

$d^2 f((x,y,z);(0,-1,0)) = -6dy^2 + 2\left(dz^2 + 4dxdz + 4dx^2\right) - 8dx^2 =$
$= -6dy^2 + 2(dz+2dx)^2 - 8dx^2$, deci $d^2 f((x,y,z);(0,-1,0))$ este nedefinită, prin urmare $P_2(0,-1,0)$ este punct şa.

$d^2 f\left((x,y,z);\left(\sqrt{2},1,-2\sqrt{2}\right)\right) = 24dx^2 + 6dy^2 + 2dz^2 + 8dxdz =$
$= 6dy^2 + 2(dz+2dx)^2 + 16dx^2 > 0$, deci $P_3\left(\sqrt{2},1,-2\sqrt{2}\right)$ este punct de minim local.

$d^2 f\left((x,y,z);\left(\sqrt{2},-1,-2\sqrt{2}\right)\right) = 24dx^2 - 6dy^2 + 2dz^2 + 8dxdz =$
$= -6dy^2 + 2(dz+2dx)^2 + 16dx^2$, deci $P_4\left(\sqrt{2},-1,-2\sqrt{2}\right)$ punct şa.

Analog, obținem că $P_5\left(-\sqrt{2},1,2\sqrt{2}\right)$ este punct de minim local şi $P_6\left(-\sqrt{2},-1,2\sqrt{2}\right)$ este punct şa.

6. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^2 \to R, f(x,y) = x^4 + y^4$.

Rezolvare:
Etapa 1. Determinăm punctele staționare. Avem că:
$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4x^3 \\ f'_y(x,y) = 4y^3 \end{cases}$, deci $P(0,0)$ punct staționar.

- $H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$; $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$,

deci nu se poate stabili natura punctului folosind matricea hessiană.

- $\Delta(0,0) = \left[f''_{xy}(0,0)\right]^2 - f''_{x^2}(0,0) \cdot f''_{y^2}(0,0) = 0$, prin urmare nu se poate preciza natura punctului nici prin această metodă.
- $d^2 f((x,y);(0,0)) = 0$, deci nu se poate determina natura punctului cu ajutorul diferențialei.
- Folosim definiția punctului de extrem.

Avem că $f(0,0) = 0$. Deoarece $f(x,y) = x^4 + y^4 \geq f(0,0)$, $\forall (x,y) \in R^2$, rezultă că $P(0,0)$ este punct de minim global al funcției f.

7. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^2 \to R,\ f(x,y) = x^2 + y^3$.

Rezolvare:
Etapa 1. Determinăm punctele staționare. Avem că:
$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x \\ f'_y(x,y) = 3y^2 \end{cases}$, deci $P(0,0)$ punct staționar.

- $H(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6y\end{pmatrix}$; $H(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $\Delta_1=2,\ \Delta_2=0$,

deci nu se poate stabili natura punctului folosind matricea hessiană.

- $\Delta(0,0)=\left[f''_{xy}(0,0)\right]^2-f''_{x^2}(0,0)\cdot f''_{y^2}(0,0)=0$, prin urmare nu se

poate preciza natura punctului nici prin această metodă.

- $d^2f((x,y);(0,0))=2dx^2$**,** care este o funcțională semipozitiv definită, deci nu se poate determina natura punctului cu ajutorul diferențialei.
- Folosim definiția punctului de extrem local.

Avem că $f(0,0)=0$.

Fie V o vecinătate a punctului $(0,0)$; rezultă că există $\varepsilon>0$ astfel încât $(-\varepsilon,\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\subset V$; fie $(a_1,a_2)=\left(0,-\frac{\varepsilon}{2}\right)\in V$ şi $(b_1,b_2)=\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)\in V$; avem că $f(a_1,a_2)=-\frac{\varepsilon^3}{8}<0=f(0,0)$ şi $f(b_1,b_2)=\frac{\varepsilon^3}{8}>0=f(0,0)$. Prin urmare, am arătat că în orice vecinătate a punctului $(0,0)$ funcția ia atât valori mai mari ca $f(0,0)$, cât şi valori mai mici ca $f(0,0)$. Rezultă, conform definiției, că $P(0,0)$ este punct şa.

8. Să se determine punctele de extrem local ale funcției: $f:R^2\to R, f(x,y)=xy^2e^{x-y}$.

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staționare. Avem că:

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=y^2e^{x-y}+xy^2e^{x-y}=y^2e^{x-y}(x+1)\\ f'_y(x,y)=2xye^{x-y}-xy^2e^{x-y}=xye^{x-y}(2-y)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 e^{x-y}(x+1)=0 \\ xye^{x-y}(2-y)=0 \end{cases}$$

Din prima ecuație rezultă că $x=-1$ sau $y=0$.

- Dacă $y=0 \Rightarrow x \in R \Rightarrow (\alpha,0)$ punct staționar, $\forall \alpha \in R$.
- Dacă $x=-1 \Rightarrow y=0$ (obținut și la cazul precedent) sau

$y=-2 \Rightarrow (-1,-2)$ este punct staționar.

$f''_{x^2}(x,y)=y^2e^{x-y}(x+1)+y^2e^{x-y}=y^2e^{x-y}(x+2)$;

$f''_{y^2}(x,y)=x(2-2y)e^{x-y}-x(2y-y^2)e^{x-y}=xe^{x-y}(y^2-4y+2)$;

$f''_{xy}(x,y)=2ye^{x-y}(x+1)-y^2e^{x-y}(x+1)=y(2-y)e^{x-y}(x+1)$.

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} y^2e^{x-y}(x+2) & y(2-y)e^{x-y}(x+1) \\ y(2-y)e^{x-y}(x+1) & xe^{x-y}(y^2-4y+2) \end{pmatrix}$$

$H(-1,-2)=\begin{pmatrix} 4e & 0 \\ 0 & -14e \end{pmatrix}$; $\Delta_1=4e>0$;

$\Delta_2=-56e^2<0 \Rightarrow (-1,-2)$ punct șa.

$H(\alpha,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha e^{\alpha} \end{pmatrix}$; $\Delta_1=\Delta_2=0 \Rightarrow$ natura punctului nu se poate determina cu această metodă. În aceste condiții, vom folosi definiția punctului de extrem local. Avem că $f(\alpha,0)=0$.

- Pentru $\alpha.>0$, fie $\varepsilon>0$ astfel încât $\alpha.-\varepsilon>0$. Atunci există o vecinătate $V=(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ a punctului $(\alpha,0)$astfel încât oricare ar fi $(x,y)\in V$ are loc inegalitatea

$f(x,y)=xy^2e^{x-y}\geq f(\alpha,0)=0$. Rezultă, conform definiției, că $(\alpha,0)$ este punct de minim local.

- Pentru $\alpha.<0$, fie $\varepsilon>0$ astfel încât $\alpha.+\varepsilon<0$. Atunci există o

vecinătate $V=(\alpha-\varepsilon,\ \alpha+\varepsilon)$ a punctului $(\alpha,0)$ astfel încât oricare ar fi $(x,y)\in V$ are loc inegalitatea

$f(x,y)=xy^2e^{x-y}\le f(\alpha,0)=0$. Rezultă, conform definiției, că $(\alpha,0)$ este punct de maxim local.

- Pentru $\alpha.=0$ avem că în orice vecinătate $(-\varepsilon,\varepsilon)\times U$ a punctului $(0,0)$ există atât puncte în care

$f(x,y)=xy^2e^{x-y}\le f(0,0)=0$, cât şi puncte în care

$f(x,y)=xy^2e^{x-y}\ge f(0,0)=0$. Prin urmare, conform definiției, rezultă că $(0,0)$ nu este punct de extrem local, deci este punct şa.

9. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f:R^2\to R,\ f(x,y)=a\left(x^2+y^2\right)+4xy-4x-4y$, unde $a\in R$.

Rezolvare:

Determinăm punctele staționare. Avem că:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2ax+4y-4\\ f'_y(x,y)=2ay+4x-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2ax+4y-4=0\\ 2ay+4x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2-ax}{2}\\ \left(a^2-4\right)x=2a-4\end{cases}\quad(1)$$

Cazul $a)$ Dacă $a\in R\setminus\{\pm 2\}$, atunci $x=\dfrac{2}{a+2}=y$, deci $P\left(\frac{2}{a+2},\frac{2}{a+2}\right)$ punct staționar.

$$H(x,y)=\begin{pmatrix}2a & 4\\ 4 & 2a\end{pmatrix}=H\left(\tfrac{2}{a+2},\tfrac{2}{a+2}\right);\ \Delta_1=2a;\ \Delta_2=4a^2-16.$$

a	$-\infty$ -2 0 2 $+\infty$
Δ_1	- - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + +
Δ_2	+ + + + + 0 - - - - - - - - - - - - - - - - - 0 + + + + +

Din tabelul de mai sus rezultă că:

Dacă $a\in(-\infty,2)$, atunci $P\left(\frac{2}{a+2},\frac{2}{a+2}\right)$ este punct de maxim local.

Dacă $a \in (-2,2) \setminus \{0\}$, atunci $P\left(\frac{2}{a+2}, \frac{2}{a+2}\right)$ este punct şa.

Dacă $a = 0$, avem că $\Delta_2 < 0$, deci, conform observației 1 din breviarul teoretic, rezultă că $P\left(\frac{2}{a+2}, \frac{2}{a+2}\right)$ este punct şa.

Dacă $a \in (2, +\infty)$, atunci $P\left(\frac{2}{a+2}, \frac{2}{a+2}\right)$ este punct de minim local.

Cazul b) Dacă $a = 2$, atunci ecuația (1) devine: $0 = 0$, deci $x = \alpha,\ \alpha \in R,\ y = 1 - \alpha$ prin urmare $M_\alpha(\alpha, 1-\alpha)$ punct staționar.

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = H(\alpha, 1-\alpha)$; $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 0$, deci nu se poate preciza natura punctului folosind matricea hessiană.

$d^2 f((x,y);(\alpha,1-\alpha)) = 4dx^2 + 4dy^2 + 8dxdy = 4(dx + dy)^2$, care eset o funcțională pătratică semipozitiv definită, deci nu se poate afla natura punctului nici prin această metodă.

În acest caz, vom aplica definiția punctului de extrem. Avem că

$f(\alpha, 1-\alpha) = -2$; $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 4x - 4y =$

$= 2(x + y - 1)^2 - 2 \geq -2, \forall (x,y) \in R^2$, prin urmare $(\alpha, 1-\alpha)$ este punct de minim global al funcției f.

Cazul c) Dacă $a = -2$, atunci ecuația (1) devine: $0 = -8$, deci funcția nu are puncte staționare.

Presupunem că f are un punct de extrem local $P(a,b)$.

Deoarece f admite derivate parțiale în orice punct, conform propoziției din breviarul teoretic ar rezulta că

$f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$, deci $P(a,b)$ ar fi punct staționar, contradicție. Prin urmare, pentru $a = -2$ funcția nu are puncte de extrem local.

10. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^3 \to R,\ f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{2}{3}}$.

Rezolvare:

Etapa 1. Determinăm punctele staționare.

Pentru $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ avem că:

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} = 0 \\ f'_y(x,y,z) = \dfrac{4y}{3\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} = 0 \\ f'_z(x,y,z) = \dfrac{4z}{3\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}} = 0 \end{cases}$$, sistem care nu are soluție.

Pentru a calcula derivatele parțiale în punctul $(0,0,0)$ vom folosi definiția.

$$f'_x(0,0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x} = 0$$

$$f'_y(0,0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y,0) - f(0,0,0)}{y-0} = \lim_{x\to 0} \frac{y^{\frac{4}{3}}}{y} = 0$$

$$f'_z(0,0,0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(0,0,z) - f(0,0,0)}{z-0} = \lim_{x\to 0} \frac{z^{\frac{4}{3}}}{z} = 0$$

Obținem că $(0,0,0)$ este punct staționar al funcției f.

Etapa 2. Stabilim natura punctului staționar.

$$f''_{x^2}(0,0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_x(x,0,0) - f'_x(0,0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}}}{x} = \frac{4}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$= +\infty \notin R$, deci funcția f nu este de două ori derivabilă în raport cu

x, prin urmare nu putem aplica algoritmul prezentat în breviarul teoretic pentru a determina natura punctului staționar.
Conform observației din breviarul teoretic, în aceste condiții vom aplica definiția punctelor de extrem.

Observăm că $f(x,y,z) \geq f(0,0,0), \ \forall (x,y,z) \in R^3$, aşadar punctul $(0,0,0)$ este punct de minim global al funcției f.

11. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f : R^3 \to R, \ f(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{3}}$.

Rezolvare:
Etapa 1. Determinăm punctele staționare.

Pentru $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ avem că:

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^2}} = 0 \\ f'_y(x,y,z) = \dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^2}} = 0 \\ f'_z(x,y,z) = \dfrac{2z}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^2}} = 0 \end{cases}$$

, sistem care nu are soluție.

Pentru a calcula derivatele parțiale în punctul $(0,0,0)$ vom folosi definiția. Avem că:

$$f'_x(0,0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0,0) - f(0,0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

, limită care nu există.

Rezultă că funcția nu are derivate parțiale în punctul $(0,0,0)$.

Obținem că funcția nu are puncte staționare, prin urmare nu putem aplica algoritmul prezentat în breviarul teoretic.
În aceste condiții, vom aplica definiția punctelor de extrem.

Observăm că $f(x,y,z) \geq f(0,0,0), \ \forall (x,y,z) \in R^3$, aşadar punctul $(0,0,0)$ este punct de minim global al funcției f.

12. Să se determine valorile parametrilor $a,b,c \in R$ astfel încât funcția $f: R^2 \to R, \ f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + ax + by + c$ să admită în $(-2,-1)$ un punct de maxim local, în care valoarea funcției să fie egală cu -30.

Rezolvare:

Deoarece $(-2,-1)$ este punct de extrem local, conform propoziției din breviarul teoretic rezultă că $\begin{cases} f'_x(-2,-1) = 0 \\ f'_y(-2,-1) = 0 \end{cases}$.

Avem că:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + a \\ f'_y(x,y) = 6xy + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(-2,-1) = a + 15 \\ f'_y(-2,-1) = b + 12 \end{cases}.$$

Rezultă $\begin{cases} a + 15 = 0 \Rightarrow a = -15 \\ b + 12 = 0 \Rightarrow b = -12 \end{cases}$.

Verificăm dacă punctul staționar $(-2,-1)$ este punct de extrem local, folosind matricea hessiană.

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix} \Rightarrow H(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$; avem că

$\Delta_1 = -12 < 0$ şi $\Delta_2 = 108 > 0$, rezultă că $(-2,-1)$ este punct de maxim local.

Din condiția $f(-2,-1) = -30$ rezultă

$-14 - 2a - b + c = -30 \Rightarrow c = -58$.

Am obținut că sunt îndeplinite cerințele din enunț pentru

$a = -15, \ b = -12, \ c = -58$

13. Să se determine parametrii $a,b,c \in R$ astfel încât funcția $f : R^2 \to R,\ f(x,y) = 3x^2 y + y^3 + ax + by + c$ să admită în $(2,1)$ un punct de extrem local.

Rezolvare:
Deoarece $(2,1)$ este punct de extrem local, conform propoziției din breviarul teoretic rezultă că $\begin{cases} f_x'(2,1) = 0 \\ f_y'(2,1) = 0 \end{cases}$.

Avem că:

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 6xy + a \\ f_y'(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + b \end{cases}.$$

Rezultă $\begin{cases} 12 + a = 0 \Rightarrow a = -12 \\ 15 + b = 0 \Rightarrow b = -15 \end{cases}$.

Verificăm dacă punctul staționar $(2,1)$ este punct de extrem local, folosind matricea hessiană.

$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow H(2,1) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$; deoarece $\Delta_1 = 6 > 0$ și $\Delta_2 = -108 < 0$, rezultă că $(2,1)$ este punct șa.

Prin urmare, nu există $a,b,c \in R$ astfel încât funcția din enunț să admită în $(2,1)$ un punct de extrem local.

PROBLEME PROPUSE

Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor:

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 1$

R: $(1,\ 2)$ punct de minim local; $(-1,\ -2)$ punct de maxim local.

2. $f(x,y)=x^2+y^2-4x-2y+4$

3. $f(x,y)=x^2+y^2+xy-3x-3y+2$

4. $f(x,y)=x^2+y^2+2xy-6x-4y+6$

5. $f(x,y)=x^3+y^3+3xy+33$

6. $f(x,y)=xy(5-x-y)$

7. $f(x,y)=x^4+y^4-4xy$

R: $(1,\ 1)$ şi $(-1,\ -1)$ sunt puncte de minim local.

8. $f(x,y)=3x^2y+y^3-12x-15y+11$

R: $(1,\ 2)$ punct de minim local; $(-1,\ -2)$ punct de maxim local.

9. $f(x,y)=xy(x+y-3)$

R: $(1,\ 1)$ punct de minim local.

10. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-2y$

R: $(0,\ 1)$ punct de minim local.

11. $f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$

12. $f(x,y)=(x+y)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$

R: $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ punct de minim local; $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ punct de maxim local.

13. $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$

R: $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\ \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\ -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ puncte de minim local;

$\left(\frac{1}{\sqrt{2e}},\ -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}},\ \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ puncte de maxim local.

14. $f(x,y)=2x^3+2y^3-3xy+3$

15. $f(x,y)=3xy^2-x^3-15x-36y+9$

R: Funcția nu are puncte de extrem local.

16. $f(x,y)=x^3+y^2+3xy+3x+y$

17. $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$

18. $f(x,y)=x^4+y^3-8x^3+18x^2-3y^2-8x-3y+8$

R: $\left(1+\sqrt{2},2+\sqrt{3}\right)$, $\left(1+\sqrt{2},2-\sqrt{3}\right)$ puncte de minim local;
$\left(1-\sqrt{2},2\right)$punct de maxim local.

19. $f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$

20. $f(x,y)=x^3+y^3-6x^2-9y^2+9x+15y$

21. $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x};\ x\neq 0, y\neq 0$

22. $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+y^2-4y;\ x\neq 0, y\neq 0$

23. $f(x,y)=\frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

24. $f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y};x,y>0$

R: $(5,\ 2)$ punct de minim local.

25. $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y);\ \ x,y>0$

26. $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

R: $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ şi $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ puncte de minim local.

27. $f(x,y)=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$

28. $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$

29. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-2x-y$

R: $P(1,\ 0)$ punct de minim local.

30. $f(x,y)=x^2+ay^2-4x-2y+2$, $a\in R$

31. $f(x,y)=x^2+y^2+axy-2x-2y+2$, $a\in R$

32. $f(x,y)=ax^2+ay^2+4xy-8x-10y+12$, $a\in R$

33. $f(x,y)=ax^2+ay^2+xy-4x-4y+4$, $a\in R$

34. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^3+2x+12yz+2$

R: $(-1,\,-144,\,24)$ punct de minim local.

35. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz-4x-4y-4$

36. $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+6xy-6xz+8yz-2x-18y-8z$

R: Nu are puncte de extrem.

37. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z$

38. $f(x,y,z)=x+\dfrac{y^2}{4x}+\dfrac{z^2}{y}+\dfrac{2}{z};x>0,y>0,z>0$

R: $\left(\frac{1}{2},1,\,1\right)$ punct de minim local.

39. $f:\left(R^*\right)^3\to R,\ f(x,y,z)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}$.

R: $\left(\sqrt{2},\,2\sqrt{2},\,2\right)$ punct de minim local;
$\left(-\sqrt{2},\,-2\sqrt{2},\,2\right)$ punct de maxim local.

40. $f(x,y,z)=y^2+z^2+xy+yz+3x+y+z$

R: $(-8,\,5,-3)$ punct de minim local.

41. $f(x,y,z)=xyz-6x-3y-2z$

42. $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+3xy+3xz+3yz-12x-12y-12z$

43. $f(x,y,z)=xyz+xy+xz+yz-5x-7y-11z$

44. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz$

45. $f(x,y,z)=x^3-3x^2+y^2+z^2+yz-7y-10z$

46. $f(x,y,z)=16-(x+1)^2-(y+2)^2-(z+3)^2$

47. $f(x,y,z)=x(y+1)^z;\ x,y,z>0$

48. $f(x,y,z)=x^2-y^2+z^2+xy+xz+yz+6x-4y-4z$

49. $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+xz+yz-7x-12y-21z$

50. $f(x,y,z)=(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$

R: $\left(-1,\ 0,\ \frac{0}{2}\right)$ punct de minim local

51. $f(x,y,z)=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

R: $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ punct de maxim local.

52. $f(x,y,z)=ax^2+y^2+z^2+xy+xz+yz-7x-8y-9z$

53. $f:R^2\to R, f(x,y)=x^2+y^2$

R: $(0,0)$ este punct de minim global al funcției f.

54. $f:R^2\to R, f(x,y)=x^3+y^2$

R: Funcția nu are puncte de extrem local.

55. $f:R^2\to R, f(x,y)=x^2ye^{y-x}$

R: $(-2,-1)$ este punct şa; pentru $\alpha.>0$, $(0,\alpha)$ este punct de minim local; pentru $\alpha.<0$, $(\alpha,0)$ este punct de maxim local.

56. $f(x,y)=-x^2-y^4$

R: $(0,0)$ este punct de maxim global.

57. $f(x,\ y)=x^4+y^4-x^2-y^2$

R: $(0,\ 0)$ punct de maxim local şi $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ puncte de minim local.

58. Să se determine valorile parametrilor $a,b,c\in R$ astfel încât funcția $f:R^2\to R,\ f(x,y)=3xy^2+x^3+ax+by+c$ să admită în $(1,2)$ un punct de extrem local, în care valoarea funcției să fie -30.

R: $a=-15$; $b=-12$; $c=-4$.

8.2.2.EXTREME CONDIȚIONATE (CU LEGĂTURI)

BREVIAR TEORETIC

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru determinarea punctelor de extrem local condiționat ale unei funcții de mai multe variabile

Pentru a determina punctele de extrem local ale funcției

$f : A \subset R^n \to R$, cu condițiile (legăturile): $\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ g_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$

trebuie parcurse următoarele etape:

Etapa 1. Scriem funcția lui Lagrange:
$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) =$
$= f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_k g_k(x_1, x_2, ..., x_n)$
Etapa 2. Determinăm punctele staționare ale funcției Φ.
Etapa 3. Stabilim care dintre punctele staționare sunt puncte de extrem local condiționat pentru funcția f. Pentru fiecare punct staționar $\left(x_1^0, ..., x_n^0; \lambda_1^0, ..., \lambda_k^0\right)$ al funcției Φ, se înlocuiesc valorile $\lambda_1^0, ..., \lambda_k^0$ în funcția Φ, rezultând o funcție de n variabile, având punctul staționar $\left(x_1^0, ..., x_n^0\right)$. Determinăm semnul diferențialei de ordinul doi $d^2\Phi\left(x_1, ..., x_n;\ x_1^0, ..., x_n^0\right)$ a funcției $\Phi\left(x_1, ..., x_n; \lambda_1^0, ..., \lambda_k^0\right)$.

- Dacă $d^2\Phi\left(x_1,...,x_n;\ x_1^0,...,x_n^0\right)<0$ (funcționala $d^2\Phi\left(x_1,...,x_n;\ x_1^0,...,x_n^0\right)$ este negativ definită), atunci $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ este punct de maxim local condiționat.
- Dacă $d^2\Phi\left(x_1,...,x_n;\ x_1^0,...,x_n^0\right)>0$ (funcționala $d^2\Phi\left(x_1,...,x_n;\ x_1^0,...,x_n^0\right)$ este pozitiv definită), atunci $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ este punct de minim local condiționat.
- În altă situație, se diferențiază condițiile în punctul $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ şi se rezolvă sistemul obținut în raport cu $dx_1, dx_2,..., dx_n$, exprimând $dx_1, dx_2,..., dx_k$ în funcție de $dx_{k+1},..., dx_n$; apoi se înlocuiesc rezultatele găsite în expresia $d^2\Phi\left(x_1,...,x_n;\ x_1^0,...,x_n^0\right)$ şi se vede dacă punctul este de maxim sau de minim local.
- Dacă funcționala $d^2\Phi\left(x_1,...,x_n;\ x_1^0,...,x_n^0\right)$ este nedefinită, atunci $\left(x_1^0,...,x_n^0\right)$ este punct şa.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine punctele de extrem local ale funcției: $f: R^2 \to R, f(x,y)=x^2+y^2-3x-4y+3$, care verifică relația $x+2y=3$.

Rezolvare:
Metoda I. (metoda multiplicatorilor lui Lagrange)
Relația $x+2y=3 \Leftrightarrow x+2y-3=0$. Fie $g: R^2 \to R, g(x,y)=x+2y-3$.

Etapa 1. Scriem funcția lui Lagrange:

$$\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2+y^2-3x-4y+3+\lambda(x+2y-3).$$

Etapa 2. Determinăm punctele staționare ale funcției Φ:

$$\begin{cases}\Phi'_x(x,y,\lambda)=2x-3+\lambda\\ \Phi'_y(x,y,\lambda)=2y-4+2\lambda\\ \Phi'_\lambda(x,y,\lambda)=x+2y-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-3+\lambda=0\\ 2y-4+2\lambda=0\\ x+2y-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3-\lambda}{2}\\ y=\dfrac{4-2\lambda}{2}\\ \dfrac{3-\lambda}{2}+2\dfrac{4-2\lambda}{2}-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1,\\ \lambda=1\end{cases}$$

deci $(1,1,1)$ este punct staționar al funcției Φ.

Etapa 3. Pentru $\lambda=1$ obținem

$\Phi(x,y,1)=x^2+y^2-3x-4y+3+(x+2y-3)=\Phi(x,y)$ şi $P(1,1)$ este punct staționar condiționat al funcției f. Stabilim natura acestui punct, în funcție de semnul diferențialei de ordinul doi a funcției Φ în $P(1,1)$, notată $d^2\Phi(x,y;1,1)$.

Avem: $\Phi''_{x^2}(x,y)=2$; $\Phi''_{y^2}(x,y)=2$; $\Phi''_{xy}(x,y)=0$;

$\Phi''_{x^2}(1,1)=2$; $\Phi''_{y^2}(1,1)=2$; $\Phi''_{xy}(1,1)=0$. Rezultă:

$$d^2\Phi(x,y;1,1)=\Phi''_{x^2}(1,1)dx^2+\Phi''_{y^2}(1,1)dy^2+2\Phi''_{xy}(1,1)dxdy=$$

$=2dx^2+2dy^2>0$, prin urmare $P(1,1)$ este punct de minim local condiționat.

Metoda II. (metoda reducerii)
Din relația $x+2y=3$ obținem $x=3-2y$, iar funcția devine

$$f(x,y)=f(3-2y,y)=(3-2y)^2+y^2-3(3-2y)-4y+3=$$
$$=5y^2-22y+21=h(y).$$

Am obținut o funcție de o singură variabilă,
$h:R\to R,\ h(y)=5y^2-10y+3$, care este o funcție de gradul al doilea și admite pe $y=-\dfrac{b}{2a}=1$ ca punct de minim local. Rezultă că $x=1$, prin urmare $P(1,1)$ este punct de minim local condiționat al funcției f.
Observație. Metoda reducerii se poate aplica numai în cazul în care legăturile sunt date de funcții liniare.

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcției:
$f:R^3\to R,\ f(x,y,z)=2x+y-2z$, care verifică relația
$x^2+y^2+z^2=9$.

Rezolvare:
Vom aplica metoda multiplicatorilor lui Lagrange.
Relația $x^2+y^2+z^2=9 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-9=0$ Fie
$g:R^3\to R, g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-9$.
Etapa 1. Scriem funcția lui Lagrange:

$$\Phi(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=2x+y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2).$$

Etapa 2. Determinăm punctele staționare ale funcției Φ:

$$\begin{cases}\Phi'_x(x,y,z,\lambda)=2+2\lambda x\\ \Phi'_y(x,y,z,\lambda)=1+2\lambda y\\ \Phi'_z(x,y,z,\lambda)=-2+2\lambda z\\ \Phi'_\lambda(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+2\lambda x=0\\ 1+2\lambda y=0\\ -2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2-9=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ z = \dfrac{1}{\lambda} \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} = 9 \end{cases} \qquad \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}.$$

Pentru $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow P_1(-2,-1,2)$ punct staționar condiționat al funcției f.

Pentru $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow P_2(2,1,-2)$ punct staționar condiționat al funcției f.

Etapa 3.

- Pentru $\lambda = \frac{1}{2}$ obținem:

$\Phi(x, y, z, \frac{1}{2}) = 2x + y - 2z + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \Phi(x, y, z)$ și

$P_1(-2,-1,2)$ este punct staționar condiționat al funcției f. Stabilim natura acestui punct, în funcție de semnul diferențialei de ordinul doi a funcției Φ în $P_1(-2,-1,2)$.

$\Phi''_{x^2}(x, y, z) = 1$; $\Phi''_{y^2}(x, y, z) = 1$; $\Phi''_{z^2}(x, y, z) = 1$;

$\Phi''_{xy}(x, y, z) = \Phi''_{xz}(x, y, z) = \Phi''_{yz}(x, y, z) = 0$. Obținem:

$d^2\Phi(x, y, z; -2, -1, 2) = dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0$, prin urmare

$P_1(-2,-1,2)$ este punct de minim local condiționat.

- Pentru $\lambda = -\frac{1}{2}$ obținem

$\Phi(x, y, z, \frac{1}{2}) = 2x + y - 2z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \Phi(x, y, z)$ și

$P_2(2,1,-2)$ este punct staționar condiționat al funcției f. Stabilim natura acestui punct, în funcție de semnul diferențialei de ordinul doi a funcției Φ în $P_2(2,1,-2)$.

$\Phi''_{x^2}(x,y,z) = -1$; $\Phi''_{y^2}(x,y,z) = -1$; $\Phi''_{z^2}(x,y,z) = -1$;

$\Phi''_{xy}(x,y,z) = \Phi''_{xz}(x,y,z) = \Phi''_{yz}(x,y,z) = 0$. Rezultă:

$d^2\Phi(x,y,z;2,1,-2) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 < 0$, deci $P_2(2,1,-2)$ este punct de maxim local condiționat.

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcției: $f: R^3 \to R,\ f(x,y,z) = xyz$, care verifică relația $xy + yz + zx = 12$.

Rezolvare:

Vom aplica metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Relația $xy + yz + zx = 12 \Leftrightarrow xy + yz + zx - 12 = 0$. Fie $g: R^3 \to R,\ g(x,y,z) = xy + yz + zx - 12$.

Etapa1. Scriem funcția lui Lagrange:

$\Phi(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = xyz + \lambda(xy + yz + zx - 12)$.

Etapa2. Determinăm punctele staționare ale funcției Φ:

$$\begin{cases} \Phi'_x(x,y,z,\lambda) = yz + \lambda y + \lambda z & (1) \\ \Phi'_y(x,y,z,\lambda) = xz + \lambda x + \lambda z & (2) \\ \Phi'_z(x,y,z,\lambda) = xy + \lambda x + \lambda y & (3) \\ \Phi'_\lambda(x,y,z,\lambda) = xy + yz + zx - 12 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz + \lambda y + \lambda z = 0 & (1) \\ xz + \lambda x + \lambda z = 0 & (2) \\ xy + \lambda x + \lambda y = 0 & (3) \\ xy + yz + zx = 12 & (4) \end{cases}$$

$x \cdot (1) - y \cdot (2) \Rightarrow \lambda z(x - y) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ sau $z = 0$ sau $x = y$.

$a)$ Dacă $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases}$, contradicție.

b) Dacă $z=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda y = 0 \\ \lambda x = 0 \\ xy + \lambda x + \lambda y = 0 \\ xy = 12 \end{cases}$; din prima ecuație rezultă $\lambda = 0$ sau $y = 0$.

b_1) Pentru $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy = 12 \end{cases}$, contradicție.

b_2) Pentru $y = 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 12$, contradicție. Deci $x = y$.

Analog, folosind relațiile (2) şi (3), rezultă că $y = z$.

Prin urmare $x = y = z$ şi din relația (4) obținem

$3x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2 = y = z,\ \lambda = \mp 1$.

Avem punctele staționare condiționate $P_1(2,2,2)$ şi $P_2(-2,-2,-2)$.

Etapa3.

- Pentru $\lambda = -1$ obținem $\Phi(x,y,z,\lambda) = xyz - (xy + yz + zx - 12)$ şi $P_1(2,2,2)$ este punct

staționar condiționat al funcției f. Stabilim natura acestui punct, în funcție de semnul diferențialei de ordinul doi a funcției Φ în $P_1(2,2,2)$.

$\Phi''_{x^2}(x,y,z) = \Phi''_{y^2}(x,y,z) = \Phi''_{z^2}(x,y,z) = 0$;

$\Phi''_{xy}(x,y,z) = z - 1;\quad \Phi''_{xz}(x,y,z) = y - 1;\quad \Phi''_{yz}(x,y,z) = x - 1 \Rightarrow$

$\Phi''_{xy}(2,2,2) = 1;\quad \Phi''_{xz}(2,2,2) = 1;\quad \Phi''_{yz}(2,2,2) = 1 \Rightarrow$

$d^2\Phi(x,y,z;2,2,2) = dxdy + dydz + dzdx$ (*).

Pentru a stabili semnul acestei funcționale, diferențiem legătura $g(x,y,z)=0$ şi obținem $dg(x,y,z;2,2,2)=0$. Avem că:

$g(x,y,z)=xy+yz+zx-12$; $g'_x(x,y,z)=y+z$;

$g'_y(x,y,z)=x+z$;

$g'_z(x,y,z)=x+y \Rightarrow g'_x(2,2,2)=g'_y(2,2,2)=g'_z(2,2,2)=4$, prin urmare relația $dg(x,y,z;2,2,2)=0$ devine $4dx+4dy+4dz=0$; de aici obținem $dz=-dx-dy$ şi, prin înlocuire în (*), rezultă:

$d^2\Phi(x,y,z;2,2,2)=-dx^2-dxdy-dy^2=-(dx+\frac{1}{2}dy)^2-\frac{3}{4}dy^2<0$

, deci $P_1(2,2,2)$ este punct de maxim local condiționat.

- Pentru $\lambda=1$ obținem $\Phi(x,y,z,\lambda)=xyz+(xy+yz+zx-12)$ şi $P_2(-2,-2,-2)$ este punct staționar condiționat al funcției f.

Stabilim natura acestui punct, în funcție de semnul diferențialei de ordinul doi a funcției Φ în $P_2(-2,-2,-2)$.

$\Phi''_{x^2}(x,y,z)=\Phi''_{y^2}(x,y,z)=\Phi''_{z^2}(x,y,z)=0$;

$\Phi''_{xy}(x,y,z)=z+1$; $\Phi''_{xz}(x,y,z)=y+1$; $\Phi''_{yz}(x,y,z)=x+1 \Rightarrow$

$\Phi''_{xy}(-2,-2,-2)=-1$; $\Phi''_{xz}(-2,-2,-2)=-1$; $\Phi''_{yz}(-2,-2,-2)=-1 \Rightarrow$

$d^2\Phi(x,y,z;-2,-2,-2)=-dxdy-dydz-dzdx$ (**).

Pentru a stabili semnul acestei funcționale, diferențiem legătura $g(x,y,z)=0$ şi obținem $dg(x,y,z;-2,-2,-2)=0$. Avem că:

$g(x,y,z)=xy+yz+zx-12$; $g'_x(x,y,z)=y+z$;

$g'_y(x,y,z)=x+z$;

$g'_z(x,y,z)=x+y$

$\Rightarrow g'_x(-2,-2,-2)=g'_y(-2,-2,-2)=g'_z(-2,-2,-2)=-4$, prin

urmare relația $dg(x,y,z;-2,-2,-2)=0$ devine
$-4dx-4dy-4dz=0 \Rightarrow dz=-dx-dy$ şi, prin înlocuire în (**), rezultă:

$$d^2\Phi(x,y,z;2,2,2)=dx^2+dxdy+dy^2=(dx+\tfrac{1}{2}dy)^2+\tfrac{3}{4}dy^2>0,$$

deci $P_2(-2,-2,-2)$ este punct de minim local condiționat.

PROBLEME PROPUSE

Să se determine punctele de extrem local condiționat ale funcțiilor:

1. $f:R^2 \to R, f(x,y)=x^2+y^2-3x-4y+3$, cu condiția $x+2y=3$;
R: $(1,1)$ punct de minim local condiționat.

2. $f:R^3 \to R,\ f(x,y,z)=2x+y-2z$, cu condiția $x^2+y^2+z^2=9$.
R: $(-2,-1,2)$ punct de minim local condiționat.
$(2,1,-2)$ punct de maxim local condiționat.

3. $f:R^3 \to R,\ f(x,y,z)=xyz$, cu condiția $xy+yz+zx=12$.
R: $(2,2,2)$ punct de maxim local condiționat;
$(-2,-2,-2)$ punct de minim local condiționat.

4. $f(x,y,z)=xyz$ cu condiția $x+y+z=3$.
R: $(1,\ 1,\ 1)$ punct de maxim local condiționat.

5. $f(x,y)=x^2+y^2$ cu condiția $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1$.

6. $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$ cu condiția $x^2+y^2=1$.

7. $f(x,y,z)=xyz$ cu condițiile $x+y+z=5; xy+yz+zx=8$.
R: $\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$ puncte de maxim local condiționat; $(1,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 1)$ puncte de minim local condiționat.

8. $f(x,y,z)=xyz$ cu condițiile $x+y-z=3; x-y-z=8$.

9. $f(x,y)=6-4x-3y$ cu condiția $x^2+y^2=1$.

10. $f(x,y)=xy$ cu condiția $x+y=1$

11. $f(x,y)=x+2y$ cu condiția $x^2+y^2=5$

R: $(1,\ 2)$ punct de maxim local condiționat; $(-2,\ -2)$ punct de minim local condiționat.

12. $f(x,y)=x^2+y^2$ cu condiția $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

13. $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$ cu condiția $y-x=\frac{\pi}{4}$

14. $f(x,y,z)=x-2y+2z$ cu condiția $x^2+y^2+z^2=9$

R: $(1,\ -2,\ 2)$ punct de maxim local condiționat;

$(-1,\ 2,\ -2)$ punct de minim local condiționat.

15. $f:R^3\to R,\ \ f(x,y,z)=xyz$, care verifică relația $x+y+z=3$

16. $f:R^2\to R, f(x,y)=x+2y,\quad x^2+y^2=5$

17. $f:R^3\to R, f(x,y,z)=x+2y-2z,\quad x^2+y^2+z^2=16$

R: $\left(\frac{4}{3},\ \frac{8}{3},\ -\frac{8}{3}\right)$ punct de maxim local condiționat;

$\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{8}{3},\ \frac{8}{3}\right)$ punct de minim local condiționat.

18. $f:R^3\to R, f(x,y,z)=xy+xz+yz,\quad xyz=1$

R: $(1,\ 1,\ 1)$ punct de minim local condiționat.

19. $f(x,y,z)=x+y+z,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1;\ \ x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$

R: $(3,\ 3,\ 3)$ punct de minim local condiționat.

20. $f(x,y)=x^2+y^2-4x-4y+5,\ 2x+y=3$

21. $f(x,y)=x^2+y^2+xy+x+y+1,\ \ x-y=0$

22. $f(x,y)=xy,\ \ x+y=1$

23. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz,\ \ x+y+z=3$

24. $f(x,y,z)=x^2y^3z^4,\ \ x+2y+3z=6$

25. $f(x,y,z) = xy + xz + yz, \quad x + y + z = 3$

26. $f(x,y,z) = xy + xz + yz, \quad xyz = 8$

27. $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2, \quad x^2 + y^2 = 1$

28. $f(x,y) = x + y, \quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2};\ x \neq 0, y \neq 0, a \neq 0$

29. $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{7} = 1$

30. $f(x,y,z) = xy + xz + yz, \quad x + y + z = 12$

31. $f(x,y,z) = xyz$, cu condițiile $x + y + z = 5,\ xy + xz + yz = 8$

32. $f(x,y,z) = x + y + z$, cu condițiile $x - y + z = 2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$

R: $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ punct de maxim local condiționat;

$(0, -2, 0)$ punct de minim local condiționat.

33. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3xy + xz + 2yz$,

cu condițiile $2x + y + z = 4,\ x + 2y + z = 4$

34. $f(x,y,z) = xyz$, cu condițiile $x + y - z = 5,\ x - y + z = 2$

8.3. METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

BREVIAR TEORETIC

Tipurile de ajustare frecvent utilizate sunt:

- Ajustare liniară: $y = ax + b$
- Ajustare parabolică: $y = ax^2 + bx + c$
- Ajustare hiperbolică: $y = a + \frac{b}{x}$; cu notația $z = \frac{1}{x}$ se ajunge la ajustare liniară
- Ajustare după o funcție exponențială: $y = b \cdot a^x$; prin logaritmare se obține: $\ln y = \ln b + x \ln a$ sau $z = A + Bx$ şi se ajunge tot la o ajustare liniară

PROBLEME REZOLVATE

1. Consumul de materii prime al unei societăți comerciale în primele 5 luni ale anului, exprimat în milioane lei, a fost:

Luna	ianuarie	februarie	martie	aprilie	mai
Consum(mil. lei)	2,7	2,5	3	3,9	4,1

Să se ajusteze datele după o dreaptă şi să se facă o prognoză pentru luna iulie.

Rezolvare:

Tabelul precedent poate fi reprezentat sub forma:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	2,7	2,5	3	3,9	4,1

Considerăm funcția de ajustare $f(x) = ax + b$.

Suma pătratelor erorilor este dată de funcția:

$$F(a,b)=\sum_{i=1}^{5}\left[f(x_i)-y_i\right]^2=\sum_{i=1}^{5}\left[ax_i+b-y_i\right]^2 .$$

Punem condiția ca suma pătratelor erorilor să fie minimă.

$$\begin{cases} F_a^{'}(a,b)=0 \\ F_b^{'}(a,b)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_a^{'}(a,b)=2\sum_{i=1}^{5}\left(ax_i+b-y_i\right)x_i \\ F_b^{'}(a,b)=2\sum_{i=1}^{5}\left(ax_i+b-y_i\right) \end{cases}$$; va rezulta sistemul:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{5}x_i^2+b\sum_{i=1}^{5}x_i-\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=0 \\ a\sum_{i=1}^{5}x_i+5b-\sum_{i=1}^{5}y_i=0 \end{cases} \qquad (*)$$

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
-2	2,7	4	-5,4
-1	2,5	1	-2,5
0	3	0	0
1	3,9	1	3,9
2	4,1	4	8,2
$\sum_{i=1}^{5}x_i=0$	$\sum_{i=1}^{5}y_i=16,$	$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=10$	$\sum_{i=1}^{5}x_iy_1=4,2$

Sistemul (*) este echivalent cu:

$$\begin{cases} 10\cdot a+0\cdot b=4,2 \\ 0\cdot a+5\cdot b=16,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0,42 \\ b=3,24 \end{cases}.$$

Am obținut dreapta de ajustare $f(x) = 0{,}42x + 3{,}24$.

Pentru o prognoză pe luna iulie vom considera $x = 4$ şi vom obține $f(4) = 4{,}92$ milioane lei..

2. Volumul vânzărilor unui produs în timp de 7 luni a înregistrat următoarea evoluție:

Luna	ian.	feb.	martie	aprilie	mai	iunie	iulie
Volumul vânzărilor (mil. lei)	30	54	76	82	70	50	45

Să se ajusteze datele după o parabolă şi să se facă o prognoză pentru luna următoare.

Rezolvare:

Tabelul precedent poate fi reprezentat sub forma:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_i	30	54	76	82	70	50	45

Considerăm funcția de ajustare $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Suma pătratelor erorilor este dată de funcția:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{7}\left[f(x_i) - y_i\right]^2 = \sum_{i=1}^{7}\left[ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right]^2.$$

Punem condiția ca suma pătratelor erorilor să fie minimă.

$$\begin{cases} F'_a(a,b,c) = 0 \\ F'_b(a,b,c) = 0 \\ F'_c(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_a'(a,b,c) = 2\sum_{i=1}^{7}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)x_i^2 \\ F_b'(a,b,c) = 2\sum_{i=1}^{7}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)x_i \\ F_c'(a,b,c) = 2\sum_{i=1}^{7}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right) \end{cases}$$; va rezulta sistemul:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{7}x_i^4 + b\sum_{i=1}^{7}x_i^3 + c\sum_{i=1}^{7}x_i^2 - \sum_{i=1}^{7}x_i^2 y_i = 0 \\ a\sum_{i=1}^{7}x_i^3 + b\sum_{i=1}^{7}x_i^2 + c\sum_{i=1}^{7}x_i - \sum_{i=1}^{7}x_i y_i = 0 \\ a\sum_{i=1}^{7}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{7}x_i + 7c - \sum_{i=1}^{7}y_i = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
-3	30	9	-27	81	-90	270
-2	54	4	-8	16	-108	216
-1	76	1	-1	1	-76	76
0	82	0	0	0	0	0
1	70	1	1	1	70	70
2	50	4	8	16	100	200
3	45	9	27	81	135	405
$\sum_{i=1}^{7}x_i = 0$	$\sum_{i=1}^{7}y_i = 407$	$\sum_{i=1}^{7}x_i^2 = 28$	$\sum_{i=1}^{7}x_i^3 = 0$	$\sum_{i=1}^{7}x_i^4 = 196$	$\sum_{i=1}^{7}x_i y_i = 31$	$\sum_{i=1}^{7}x_i^2 y_i = 1237$

Sistemul (*) este echivalent cu:

$$\begin{cases} 196a + 0\cdot b + 28c = 1237 \\ 0\cdot a + 28b + 0\cdot c = 31 \\ 28a + 0\cdot b + 7c = 407 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4,654 \\ b = 1,107 \\ c = 76,761 \end{cases}.$$

Am obținut parabola de ajustare

$f(x) = -4,654x^2 + 1,107x + 76,761$.

Pentru o prognoză pe luna următoare vom considera $x = 4$ şi vom obține $f(4) = 6,725$ milioane lei..

PROBLEME PROPUSE

1. Cifra de afaceri a unei firme în ultimii 5 ani, exprimată în miliarde lei, a fost:

Anii	1997	1998	1999	2000	2001
Cifra de afaceri(mld.lei)	3,8	4,1	4,6	5,2	5,5

a) Să se ajusteze datele după o dreaptă.

b) Să se facă o prognoză pentru următorii doi ani.

R: *a*) $f(x) = 0,45x + 4,64$; *b*) 5,99; 6,44.

2. Valoarea profitului înregistrat de un agent economic în timp de 7 trimestre a înregistrat următoarea evoluție:

Trimestrul	1	2	3	4	5	6	7
Valoarea profitului (mil. lei)	34	52	98	76	65	58	52

a) Să se ajusteze datele după o parabolă.

b) Să se facă o prognoză pentru următorul trimestru.

R: *a*) $f(x) = -4,32x^2 + 1,18x + 79,42$; *b*) 15,02.

3. Valoarea produselor rămase nevândute într-un magazin pe timp de 7 luni, exprimată în milioane lei, este dată în tabelul următor:

Luna	ian.	feb.	martie	aprilie	mai	iunie	iulie
Volumul vânzărilor (mil. lei)	50	30	20	15	12	10	8

Să se ajusteze datele după o hiperbolă şi să se facă prognoza pentru luna octombrie.

4. Evoluția prețului benzinei timp de 5 ani, înregistrată în luna ianuarie a fiecărui an a fost:

Anii	1997	1998	1999	2000	2001
Prețul(mii lei)	3	4	6	9	13

a) Să se ajusteze datele după o dreaptă.

b) Să se facă o prognoză pentru următorul an.

R: *a*) $f(x) = 2{,}5x + 7$; *b*) $14{,}5$.

5. Volumul vânzărilor de autoturisme în perioada 1998-2002 a fost:

Anii	1998	1999	2000	2001	2002
Volumul vânzărilor (mld. lei)	2	3	4	6	9

a) Să se ajusteze datele după o dreaptă şi după o parabolă.

b) Comparând suma pătratelor erorilor, să se determine care dintre funcțiile găsite descrie mai bine evoluția fenomenului studiat.

c) Să se facă o prognoză pentru următorul an cu ajutorul funcției alese la punctul precedent.

R: *a*) $f(x) = 1{,}7x + 4{,}8$; $g(x) = 1{,}07x^2 + 1{,}7x + 0{,}22$ *c*) $14{,}9$.

6. Evoluția prețului de vânzare a unui produs timp de 5 trimestre este dată în tabelul următor:

Trimestrul	1	2	3	4	5
Valoarea profitului (mil. lei)	5	6	8	10	13

a) Să se ajusteze datele după o dreaptă.

b) Să se facă o prognoză pentru trimestrul următor.

R: *a*) $f(x) = 2x + 8{,}4$; *b*) $14{,}4$.

7. Producția unui bun de consum timp de 5 luni a înregistrat următoarea evoluție:

Luna	ian.	feb.	martie	aprilie	mai
Volumul vânzărilor (mil. lei)	1	3	5	8	11

Să se ajusteze datele după o dreaptă şi să se facă prognoza pentru următoarele două luni.

R: *a*) $f(x) = -4{,}32x^2 + 1{,}18x + 79{,}42$; *b*) $15{,}02$.

CAPITOLUL 9
CALCUL INTEGRAL

9.1. INTEGRALE GENERALIZATE

9.1.1. INTEGRALE CU LIMITE INFINITE

BREVIAR TEORETIC

Definiție. Fie $f:[a,\infty)\to R$ o funcție integrabilă pe orice interval compact $[a,c]$, $c>a$. Dacă $\lim\limits_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ există şi este finită, spunem că $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă şi vom nota

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx.$$

Criteriu de convergență. Fie $f:[a,\infty)\to R$, $a>0$, $f(x)>0$, $\forall x\in[a,\infty)$. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=L\in R$, atunci:

1) pentru $\alpha>1$, rezultă că $\int_a^\infty f(x)dx$ este convergentă.

2) pentru $\alpha\le 1$ şi $L\ne 0$, rezultă că $\int_a^\infty f(x)dx$ este divergentă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Folosind definiția, să se studieze natura următoarelor integrale şi în caz de convergență să se determine valoarea acestora:

$a)\ I_1=\int_a^{\infty} e^{-kx}dx, k\in R$; $b)\ I_2=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$;

$c)\ I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+6x+12}dx$; $d)\ I_4=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx,\ \alpha\in R$;

$e)\ I_5=\int_{-\infty}^{0}x\cos x dx$; $f)\ I_6=\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{x^2+5x+6}dx$.

Rezolvare:

$a)$ Vom aplica definiția din breviarul teoretic.

Funcția $f:[a,\infty)\to R,\ f(x)=e^{-kx}$ este integrabilă pe orice interval compact $[a,c],\ c>a$. Studiem existența şi valoarea limitei:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_a^c e^{-kx}dx=\lim_{c\to\infty}-\frac{1}{k}\left(e^{-kc}-e^{-ka}\right)=\frac{e^{-ka}}{k}-\frac{1}{k}\lim_{c\to\infty}e^{-kc},$$

pentru $k\neq 0$.

- Pentru $k>0$ avem $\lim\limits_{c\to\infty}e^{-kc}=0\Rightarrow L=\frac{1}{k}e^{-ka}$, prin urmare

integrala este convergentă şi $\int_a^{\infty}e^{-kx}dx=\frac{1}{k}e^{-ka}$.

- Pentru $k<0$ avem $\lim\limits_{c\to\infty}e^{-kc}=\infty\Rightarrow L=\infty$, deci integrala este

divergentă.

- pentru $k=0$ avem $I_1=\int_a^{\infty}e^0dx=\int_a^{\infty}dx$; $\lim\limits_{c\to\infty}\int_a^c dx=\lim\limits_{c\to\infty}x\Big|_a^c=+\infty$,

rezultă că integrala este divergentă.

$b)$ Aplicăm definiția. Funcția $f:(-\infty,0]\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$ este integrabilă pe orice interval compact $[-c,0],\ c>0$. Vom studia limita:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{0}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\lim_{c\to\infty}\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\Big|_{-c}^{0}=\ln\sqrt{2}-$$

$$-\lim_{c\to\infty}\ln\left(-c+\sqrt{c^2+2}\right)=\ln\sqrt{2}-\lim_{c\to\infty}\ln\frac{2}{c+\sqrt{c^2+2}}=\ln\sqrt{2},$$

prin urmare integrala I_2 este convergentă şi $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\ln\sqrt{2}$.

$c)$ Funcția $f:R\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+12}$ este integrabilă pe orice interval compact $[-c,c],\ c>0$. Vom studia limita:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{1}{x^2+6x+12}dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^{c}\frac{1}{(x+3)^2+3}dx=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{c\to\infty}\left(arctg\frac{c+3}{\sqrt{3}}-arctg\frac{-c+3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}},$$ rezultă

că integrala I_3 este convergentă şi $I_3=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+6x+12}dx=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

$d)$ Funcția $f:[1,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$ este integrabilă pe orice interval compact $[1,c],\ c>1$. Studiem existența şi valoarea limitei:

$L=\lim_{c\to\infty}\int_{1}^{c}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$. Pentru $\alpha\neq1$ avem:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{c\to\infty}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^c=\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{\alpha-1}\lim_{c\to\infty}c^{1-\alpha};$$

- Dacă $\alpha<1\Rightarrow L=\infty$, rezultă că integrala este divergentă.
- Dacă $\alpha>1\Rightarrow L=\dfrac{1}{\alpha-1}$, deci integrala este convergentă.
- Dacă $\alpha=1\Rightarrow L=\lim\limits_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x}dx=\lim\limits_{c\to\infty}\ln c=\infty$, prin urmare

integrala este divergentă.

e) Aplicăm definiția. Funcția $f:(-\infty,0]\to R,\ f(x)=x\cos x$ este integrabilă pe orice interval compact $[-c,0],\ c>0$. Vom studia limita:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^0 x\cos x dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^0 x(\sin x)'dx=\lim_{c\to\infty}\left(x\sin x\Big|_{-c}^0-\int_{-c}^0\sin x dx\right)=$$

$$=\lim_{c\to\infty}\left(-c\sin c+1-\cos c\right)=\lim_{c\to\infty}c\left(-\sin c+\frac{1}{c}-\frac{\cos c}{c}\right)=\lim_{c\to\infty}f(c);$$

pentru $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty$;

pentru $x_n'=2n\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=\infty$, prin urmare nu există

$\lim\limits_{c\to\infty}\int_{-c}^0 x\cos x dx$, deci integrala $I_5=\int_{-\infty}^0 x\cos x dx$ este divergentă.

f) Funcția $f:[-1,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ este integrabilă pe orice interval compact $[-1,c],\ c>-1$. Studiem limita:

$$L=\lim_{c\to\infty}\int_{-1}^{c}\frac{1}{x^2+5x+6}dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-1}^{c}\frac{1}{(x+\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}dx=$$

$$=\lim_{c\to\infty}\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\Bigg|_{-1}^{c}=\lim_{c\to\infty}\left(\ln\frac{c+2}{c+3}-\ln\frac{1}{2}\right)=\ln 2$$, prin urmare

integrala I_6 este convergentă şi $I_6=\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{x^2+5x+6}dx=\ln 2$.

2. Utilizând criteriul de convergență, să se studieze natura următoarelor integrale, iar în caz de convergență să se afle valoarea acestora:

$a)\ I_1=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^6}dx$; $b)\ I_2=\int_{-1}^{\infty}\frac{3x+4}{x\sqrt[3]{2x+3}}dx$; $c)\ \int_1^{\infty}\frac{arctgx}{x^2}dx$.

Rezolvare:

a) Funcția $f:[0,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^6}$, are proprietatea că $f(x)>0,\ \forall x\in[0,\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}\dfrac{x^2}{1+x^6}=1$, pentru $\alpha=4>1$ rezultă, conform criteriului de convergență enunțat în breviarul teoretic, că integrala este convergentă.

Valoarea integralei este:

$$I=\lim_{c\to\infty}\int_0^{c}\frac{x^2}{1+x^6}dx=\lim_{c\to\infty}\left(\frac{1}{3}arctgx^3\Big|_0^c\right)=\lim_{c\to\infty}\frac{1}{3}arctgc^3=\frac{\pi}{6}.$$

b) Funcția $f:[-1,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{3x+4}{x\sqrt[3]{2x+3}}$, are proprietatea că $f(x)>0,\ \forall x\in[-1,\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot\dfrac{3x+4}{x\sqrt[3]{2x+3}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$, pentru $\alpha=\dfrac{1}{3}<1$ rezultă, conform criteriului de convergență, că integrala este divergentă.

c) Funcția $f:[1,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{arctgx}{x^2}$, are proprietatea că $f(x)>0,\ \forall x\in[1,\infty)$. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot\dfrac{arctgx}{x^2}=\dfrac{\pi}{2}$ pentru $\alpha=2>1$ rezultă, conform criteriului de convergență, că integrala este convergentă. Valoarea integralei este:

$$I=\lim_{c\to\infty}\int_1^c\left(-\frac{1}{x}\right)' arctgx\,dx=\lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{x}arctgx\Big|_1^c+\int_1^c\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}\right)=.$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2}\int_1^c\frac{2xdx}{x^2\left(x^2+1\right)}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\lim_{c\to\infty}\int_1^{c^2}\frac{dt}{t\left(t+1\right)}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\lim_{c\to\infty}\ln\frac{c^2}{c^2+1}+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

3. Să se studieze natura integralei: $I=\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{x^m}{2x^2-4x+1}dx,\ m\in R$.

Rezolvare:

Funcția $f:[2,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{x^m}{2x^2-4x+1}$, are proprietatea că $f(x)>0,\ \forall x\in[2,\infty)$.

Avem că $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \frac{x^m}{2x^2-4x+1} = \frac{1}{2}$ dacă şi numai dacă $\alpha + m = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 - m$. Rezultă că:

- Pentru $\alpha = 2 - m > 1 \Leftrightarrow m < 1$, integrala este convergentă.
- Pentru $\alpha = 2 - m \leq 1 \Leftrightarrow m \geq 1$, integrala este divergentă.

4. Să se determine valorile parametrului $n \in R$ pentru care integrala $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{5\sqrt[11]{2x^{35}+8}} dx$ este convergentă.

Rezolvare:

Funcţia $f:[0,\infty) \to R,\ f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{5\sqrt[11]{2x^{35}+8}}$, are proprietatea că $f(x) > 0,\ \forall x \in [0,\infty)$.

$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \cdot \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{5\sqrt[11]{2x^{35}+8}} = \frac{1}{5\sqrt[11]{2}}$ dacă şi numai dacă

$\alpha + \frac{n}{2} - 1 = \frac{35}{11} \Leftrightarrow \alpha = \frac{46}{11} - \frac{n}{2}$.

Ca urmare a aplicării criteriului de convergenţă, avem că integrala este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha = \frac{46}{11} - \frac{n}{2} > 1 \Rightarrow n < \frac{70}{11}$.

PROBLEME PROPUSE

Folosind definiția, să se studieze natura următoarelor integrale şi în caz de convergență să se determine valoarea acestora (notată I):

1. $\int_0^\infty xe^{-ax}dx,\ a\in R$ **R:** divergentă dacă $a\le 0$; convergentă dacă $a>0$ şi $I=\frac{1}{a^2}$.

2. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2-2x+4}$ **R:** convergentă, $I=\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

3. $\int_0^\infty \sin x dx$ **R:** divergentă.

4. $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$; **R:** divergentă.

5. $\int_3^\infty \frac{2x+1}{x^2+4x+3}dx$ **R:** divergentă.

6. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^\alpha}dx,\ \alpha\in Z$ **R:** divergentă pentru $\alpha\le 1$, convergentă pentru $\alpha>1$ şi $I=\frac{(-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

7. $\int_{-\infty}^\infty x\sin dx$ **R:** divergentă.

8. $\int_{-1}^\infty xa^x dx,\ a>0$ **R:** convergentă pentru $a\in(0,1)$ şi $I=-a\cdot\frac{\ln a-1}{\ln^2 a}$; divergentă pentru $a\ge 1$.

9. $\int_{0}^{\infty} \cos^2 x dx$ **R:** divergentă.

10. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$ **R:** divergentă.

11. $\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln^3 x}} dx$ **R:** convergentă şi $I = 2$.

12. $\int_{1}^{\infty} \frac{2x-1}{x^3+1} dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 2$.

13. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

14. $\int_{1}^{\infty} e^{-ax} \cos x \, dx, \ a \in R$ **R:** divergentă dacă $a \le 0$; convergentă dacă $a > 0$ şi $I = \frac{a}{a^2+1}$.

15. $\int_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{x^2+1} dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{3\pi^2}{32}$.

16. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx, \ \alpha \in R$ **R:** divergentă dacă $\alpha \le 1$; convergentă dacă $\alpha > 1$ şi $I = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$.

Utilizând criteriul de convergenţă pentru funcţii pozitive, să se studieze natura integralelor următoare şi, dacă este posibil, să se determine valoarea lor.

17. $\int_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{x} dx$ **R:** divergentă.

18. $\int_{-1}^{\infty} \frac{2x+3}{x\sqrt[3]{5x+6}}dx$ **R:** divergentă.

19. $\int_{1}^{\infty} \frac{arctgx}{x^4}dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\ln 2$.

20. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 13}dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$.

21. $\int_{1}^{\infty} \frac{3x^2 + 4}{x\sqrt[3]{2x^5 + 3}}dx$ **R:** divergentă.

22. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^3 - 1}dx$ **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{1}{6}\ln 3$.

23. $\int_{-1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{3x+5}}{x^2 + 2x + 4}dx$. **R:** convergentă.

Să se studieze natura integralelor:

24. $\int_{2}^{\infty} \frac{x^m}{x^2 + 2x + 4}dx,\ m \in R$.

R: convergentă dacă $m < 1$, divergentă dacă $m \geq 1$.

25. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^m + 3x + 1}dx,\ m \in R$.

R: divergentă dacă $m \leq 3$, convergentă dacă $m > 3$.

26. $\int_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[7]{2x-1}}{(3x-2)\sqrt[m]{4x+3}} dx,\ m \in N,\ m \geq 2$

R: convergentă dacă $m < 7$, divergentă dacă $m \geq 7$.

Să se determine mulțimea valorilor parametrilor $a, b, c \in R$ pentru care următoarele integrale sunt convergente:

27. $\int_{1}^{\infty} \frac{5+\sqrt[5]{2x^{2a+1}}}{3x^7+4} dx$. **R:** $a < \frac{29}{2}$.

28. $\int_{0}^{\infty} \frac{x\sqrt[3]{2x^5}}{9x^b+1} dx$. **R:** $b > \frac{11}{3}$.

29. $\int_{2}^{\infty} \frac{x+x^{3c-1}}{\sqrt[4]{2x-1}} dx$. **R:** $c \in \varnothing$.

9.1.2. INTEGRALE DIN FUNCȚII NEMĂRGINITE

BREVIAR TEORETIC

Definiție. Fie $f:(a,b]\to R$ o funcție integrabilă pe orice interval compact $[c,b]\subset(a,b]$ şi $\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)\right|=\infty$. Dacă $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$ există şi este finită, vom spune că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă şi vom nota $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$.

Criteriu de convergență. Fie $f:(a,b]\to R,\ f(x)>0,\ \forall x\in(a,b]$ şi $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

1) Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}(x-a)^{\beta}\cdot f(x)=A\in R$, pentru $\beta<1$ atunci $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

2) Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}(x-a)^{\beta}\cdot f(x)=A\in R^{*}$, pentru $\beta\ge 1$ atunci $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

PROBLEME REZOLVATE

1. Folosind definiția, să se studieze natura următoarelor integrale şi în caz de convergență să se determine valoarea acestora:

$a)\ I_1=\int_{-3}^{0}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx;\quad b)\ I_2=\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^2-6x+8}dx;$

$c)\ I_3=\int_{a}^{b}\frac{1}{(x-a)^p}dx,\ p\in R;\quad d)\ I_4=\int_{1}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx;$

Rezolvare:

$a)$ Fie $f:(-3,0]\to R,\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. Cum

$$\lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}=+\infty,$$

rezultă că funcția este nemărginită în unul din punctele domeniului de integrare.

Avem că f este continuă, deci integrabilă pe orice interval compact $[c,0]\subset(-3,0]$.

Studiem existența şi valoarea limitei:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\int_{-3+\varepsilon}^{0}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\arcsin\frac{x}{3}\Big|_{-3+\varepsilon}^{0}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\\varepsilon>0}}\left(0-\arcsin\frac{-3+\varepsilon}{3}\right)=\frac{\pi}{2},$$

deci integrala este convergentă şi $I_1=\int_{-3}^{0}\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{\pi}{2}$.

$b)$ Fie $f:[-1,2)\to R,\ f(x)=\frac{1}{x^2-6x+8}$. Cum $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=+\infty$,

rezultă că funcția este nemărginită în unul din punctele domeniului de integrare.

Funcția f este continuă, deci integrabilă pe orice interval compact $[-1,c]\subset[-1,2)$.

Studiem existența şi valoarea limitei:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-1}^{2-\varepsilon}\frac{1}{x^2-6x+8}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{-1}^{2-\varepsilon}\frac{1}{(x-3)^2-1}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|\right)\Bigg|_{-1}^{2-\varepsilon}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\left(\ln\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}-\ln\frac{5}{3}\right)=\infty$$, deci integrala este divergentă.

$c)$ Funcția $f:(a,b]\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^p}$ este nemărginită şi integrabilă pe orice interval compact $[c,b]\subset(a,b]$. Studiem limita:

$$L=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{1}{(x-a)^p}dx=\frac{1}{1-p}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}(x-a)^{1-p}\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=$$

$$=\frac{1}{1-p}\left((b-a)^{1-p}-\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\varepsilon^{1-p}\right)$$, pentru $p\neq 1$.

- Dacă $p<1$ avem $L=\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$, deci integrala este

convergentă şi are valoarea: $I_3=\displaystyle\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$.

- pentru $p>1$ avem $L=\infty$, deci integrala este divergentă.
- pentru $p=1$ avem

$$L=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{a+\varepsilon}^{b}\frac{1}{x-a}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\ln|x-a|\Big|_{a+\varepsilon}^{b}=\ln(b-a)-\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\ln\varepsilon=+\infty,$$

prin urmare integrala este divergentă.

$d)$ Fie $f:(1,e]\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$,

rezultă că funcția este nemărginită în unul din punctele domeniului de integrare.
Funcția f este continuă, deci integrabilă pe orice interval compact $[c,e]\subset(1,e]$.
Studiem existența şi valoarea limitei:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^{e}=-\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\ln(\ln(1+\varepsilon))=\infty$$, deci

integrala este divergentă.

2. Folosind criteriul de convergență pentru funcții pozitive să se studieze natura următoaelor integrale şi, dacă este posibil, să se determine valoarea acestora:

$a)\ \displaystyle\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$; $b)\ \displaystyle\int_1^4\frac{1}{x^3-3x+2}dx$;

$c)\ \displaystyle\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx,\ a<b$.

Rezolvare:

$a)$ Fie $f:[0,2)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Avem:

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}=+\infty$. Vom aplica criteriul de convergență enunțat în breviarul teoretic. Avem că $f(x)>0,\ \forall x\in[0,2)$ şi.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{(2-x)^{\alpha}}{\sqrt{4-x^2}}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{(2-x)^{\alpha}}{(2+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}$$ pentru $\alpha=\frac{1}{2}<1$, deci,

conform criteriului de convergență, rezultă că integrala este convergentă. Valoarea integralei este:

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\varepsilon}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\arcsin\frac{2-\varepsilon}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

b) Fie $f:(1,4]\to R,\ f(x)=\frac{1}{x^3-3x+2}$.

Avem $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{x^3-3x+2}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}=+\infty$. Avem că

$f(x)>0,\ \forall x\in(1,4]$ şi.

$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(x-1)^{\alpha}}{(x-1)^2(x+2)}=1$ pentru $\alpha=2>1$, deci, conform criteriului de convergență, rezultă că integrala este divergentă.

c) Fie $f:(a,b)\to R,\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$. Scriem

$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx=I_1+I_2$, unde $I_1=\int_a^c\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx$ şi

$I_2=\int_c^b\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx,\quad a<c<b$.

Avem că $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=+\infty$ şi $f(x)>0,\ \forall x\in(a,c]$;

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} (x-a)^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$ pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, prin urmare integrala I_1 este convergentă.

Avem că $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = +\infty$ şi $f(x) > 0, \forall x \in [c,b)$;

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} (b-x)^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$ pentru $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, deci integrala I_2 este convergentă.

În concluzie, integrala $I = I_1 + I_2$ este convergentă.

Pentru a calcula I_1 şi I_2, facem schimbarea de variabilă:

$x = a + (b-a)\sin^2 t \Rightarrow dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt$;

Obținem:

$$I = I_1 + I_2 = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}}^{\arccos\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}} \frac{1}{\sqrt{(b-a)^2 \sin^2 t \cdot \cos^2 t}} \cdot 2(b-a)\sin t \cos t \, dt =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}}^{\arccos\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}} 2dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} 2t \Big|_{\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}}^{\arccos\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}} = \pi .$$

PROBLEME PROPUSE

Folosind definiția, să se studieze natura următoarelor integrale şi în caz de convergență să se determine valoarea acestora (notată I):

1. $I_1 = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi}{2}$.

2. $I_2 = \int\limits_{1}^{3} \frac{1}{x^2-8x+15}dx$. **R:** divergentă.

3. $I_3 = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{(b-x)^m}dx,\ m \in R$. **R:** convergentă şi

$I = \frac{(b-a)^{1-m}}{1-m}$ dacă $m < 1$, divergentă dacă $m \geq 1$.

4. $I_4 = \int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x\ln^3 x}dx$. **R:** divergentă.

Folosind criteriul de convergență pentru funcții pozitive să se studieze natura următoaelor integrale şi dacă este posibil să se determine valoarea acestora:

5. $\int\limits_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$. **R:** convergentă şi $I = \frac{\pi}{2}$.

6. $\int\limits_{-2}^{1} \frac{1}{x^3-3x-2}dx$. **R:** divergentă.

7. $\int\limits_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)(b-x)}dx,\ a < b$. **R:** divergentă.

8. $\int\limits_{3}^{5} \frac{1}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}dx$. **R:** convergentă şi $I = \pi$.

Să se studieze natura integralelor:

9. $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$. **R:** divergentă.

10. $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$. **R:** convergentă şi $I=-\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$.

Utilizând criteriul de convergență pentru funcții pozitive să se studieze natura integralelor, şi, în caz de convergență, să se determine valoarea lor:

11. $\int_0^1 \frac{1}{(x+3)\sqrt{x}}dx$. **R:** convergentă şi $I=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

12. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{(3-x)x}}dx$. **R:** convergentă şi $I=\pi$.

13. $\int_2^3 \frac{1}{x^2-3x+2}dx$. **R:** divergentă.

Să se precizeze mulțimea valorilor parametrilor reali m, n, p pentru care următoarele integrale sunt convergente:

14. $\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{2x^4+1}}{x^{2n}}dx$. **R:** $n<\frac{1}{2}$.

15. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt[m]{x^5+x-2}}dx,\ m\in N,\ m\geq 2$. **R:** $m\in N,\ m\geq 2$.

9.1.3. INTEGRALE EULERIENE

BREVIAR TEORETIC

- ***Integrala gamma:*** $\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx;\ a>0$.

Proprietăți:

1) $\Gamma(1)=1$.
2) $\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1),\ (\forall)a>1$.
3) $\Gamma(n)=(n-1)!,\ (\forall)n\in N$.
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

- ***Integrala beta:*** $\beta(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx;\ a>0,b>0$

Proprietăți:

1) $\beta(a,b)=\beta(b,a),\ \forall\, a,b>0$
2) $\beta(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\forall\, a,b>0$.
2) $\beta(a,b)=\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}dx$.
3) Dacă $a+b=1$, atunci $\beta(a,b)=\dfrac{\pi}{\sin(a\pi)}$.

PROBLEME REZOLVATE

Să se calculeze următoarele integrale:

1. $I = \int_{-1}^{+\infty} \sqrt{x+1}\, e^{-x-1} dx$.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă $x+1=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$. Intervalul de integrare se modifică după cum rezultă din tabelul de mai jos:

x	-1	∞
t	0	∞

Obținem: $I = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt$. Prin identificare cu formula de definiție a integralei gamma, rezultă $a-1=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$, prin urmare

$I = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

2. $I = \int_0^{+\infty} x^5 e^{-2x} dx$.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă $2x=t \Rightarrow x=\frac{1}{2}t \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

Obținem: $I = \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^5 e^{-t} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2^6}\int_0^{\infty} t^5 e^{-t} dt = \frac{1}{2^6}\Gamma(6) = \frac{5!}{2^6} = \frac{15}{8}$.

3. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 e^{-x^2} dx$.

Rezolvare:
Deoarece funcția care trebuie integrată este pară, rezultă că

$$I = 2\int_{0}^{+\infty} x^6 e^{-x^2} dx .$$

Folosim schimbarea de variabilă: $x^2 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$.

x	0	∞
t	0	∞

$$I = 2\int_{0}^{+\infty} t^3 e^{-t} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_{0}^{+\infty} t^{\frac{5}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi} .$$

4. $I = \int_{0}^{1} \sqrt{x} \ln^3 x dx$ **.**

Rezolvare:
Folosim schimbarea de variabilă: $\ln x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

x	0	1
t	$-\infty$	0

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{2}} t^3 e^t dt = \int_{-\infty}^{0} t^3 e^{\frac{3t}{2}} dt$$

Facem transformarea: $\frac{3t}{2} = -y \Rightarrow t = -\frac{2}{3} y \Rightarrow dt = -\frac{2}{3} dy$

t	$-\infty$	0
y	∞	0

$$I = \int_{\infty}^{0} \left(-\frac{2}{3} y\right)^3 e^{-y} \left(-\frac{2}{3}\right) dy = -\frac{16}{81}\int_{0}^{\infty} y^3 e^{-y} dy = -\frac{16}{81}\Gamma(4) = -\frac{32}{27} .$$

5. $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ (*integrala Euler-Poisson*).

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $x^2 = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$.

x	0	∞
t	0	∞

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t}\, \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

6. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx,\ a > 1$.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $\ln x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$.

x	1	∞
t	0	∞

$$I = \int_0^{\infty} t\, e^{-at} e^t\, dt = \int_0^{\infty} t\, e^{-(a-1)t} dt.$$

Folosim schimbarea de variabilă: $(a-1)t = y \Rightarrow t = \frac{1}{a-1} y \Rightarrow dt = \frac{1}{a-1} dy$.

t	0	∞
y	0	∞

$$I = \frac{1}{(a-1)^2} \int_0^{\infty} y\, e^{-y} dy = \frac{1}{(a-1)^2} \Gamma(2) = \frac{1}{(a-1)^2}.$$

7. Integrala $I=\int_{-1}^{\infty} e^{-0,5x^2-x+1}dx$ are forma $ke^a\left(\frac{\pi}{2}\right)^b$. Să se determine valorile parametrilor reali k, a şi b.

Rezolvare:

Avem că: $I=\int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2-x+1}dx=\int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2x-1}{2}}dx=$

$=\int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{x^2+2x+1}{2}+\frac{3}{2}}dx=e^{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{\infty} e^{-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}dx$. Folosim schimbarea de variabilă:

$\frac{x+1}{\sqrt{2}}=t\Rightarrow x=\sqrt{2}t-1\Rightarrow dx=\sqrt{2}dt$.

x	-1	∞
t	0	∞

$I=e^{\frac{3}{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\sqrt{2}dt$. Folosind faptul că $\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (integrala Euler-Poisson), obținem că $I=e^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=e^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, prin urmare valorile căutate ale celor trei parametri sunt: $k=1$, $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$.

Să se calculeze următoarele integrale:

8. $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

Rezolvare:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=\int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}dx$$. Prin identificare cu formula de definiție a integralei beta, obținem:

$a-1=-\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$; $b-1=-\frac{1}{3}\Rightarrow b=\frac{2}{3}$, prin urmare, având în vedere definiția şi proprietatea 3 pentru integrala beta, rezultă:

$$I=\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

9. $I=\int_0^1 x^8\left(1-x^3\right)dx$.

Rezolvare:

Facem schimbarea de variabilă $x^3=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{3}}\Rightarrow dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$.

x	0	1
t	0	1

$$I=\frac{1}{3}\int_0^1 t^{\frac{8}{3}}(1-t)t^{-\frac{2}{3}}dt=\frac{1}{3}\int_0^1 t^2(1-t)dt=\frac{1}{3}\beta(3,2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)}=\frac{1}{12}.$$

10. $I=\int_0^1 \sqrt[3]{x}\left(1-x^2\right)^{1,5}dx$.

Rezolvare:

Facem schimbarea de variabilă: $x^2=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{2}}\Rightarrow dx=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

Prin urmare, $I=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\left(1-x^2\right)^{1,5}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{6}}(1-t)^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{1}{2}}dt=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{3}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{2}{3},\frac{5}{2}\right).$$

11. Să se calculeze: a) $I=\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^6}dx$; b) $I=\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}dx$.

Rezolvare:

a) Prin identificare cu a doua formulă de definiție a integralei beta (proprietatea 2), obținem: $a-1=1\Rightarrow a=2$; $a+b=6\Rightarrow b=4$, prin urmare $I=\beta(2,4)=\frac{\Gamma(2)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma(6)}=\frac{1}{20}$.

b) Facem schimbarea de variabilă $x^6=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{6}}\Rightarrow dx=\frac{1}{6}t^{-\frac{5}{6}}dt$.

x	0	∞
t	0	∞

$$I=\frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{6}}}{1+t}\cdot\frac{1}{6}t^{-\frac{5}{6}}dt=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{1+t}=\frac{1}{6}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

12. Integrala $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{1,4}(\cos x)^{-0,6}dx$ are forma $k\cdot\beta(p,q)$, unde $k,p,q\in R$; $p,q>0$. Să se afle valorile parametrilor k,p,q.

Rezolvare:

Folosim schimbarea de variabilă: $\sin^2 x=t\Rightarrow 2\sin x\cos x dx=dt$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Transformăm funcția care trebuie integrată astfel:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{0,4}(\cos x)^{-1,6}\,2\sin x\cos x dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x)^{0,2}(\cos^2 x)^{-0,8}\,2\sin x\cos x dx.$$ Obținem:

$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{0,2}(1-t)^{-0,8}dt=\frac{1}{2}\beta(1,2;\ 0,2)$, deci $k=\frac{1}{2};\ p=1,2;\ q=0,2$.

13. Să se calculeze integrala: $I=\int_{-4}^{3}\frac{dx}{\sqrt[6]{(x+4)(3-x)^5}}$.

Rezolvare:

Integrala se poate scrie: $I=\int_{-4}^{3}(x+4)^{-\frac{1}{6}}(3-x)^{-\frac{5}{6}}dx$.

Încercăm să facem schimbarea de variabilă

$x+4=t\Rightarrow x=t-4\Rightarrow dx=dt$.

x	-4	3
t	0	7

Se observă că intervalul de integrare devine $(0,7)$, prin urmare, pentru a ajunge la intervalul $(0,1)$, vom folosi schimbarea de variabilă $\frac{x+4}{7}=t\Rightarrow x=7t-4\Rightarrow dx=7dt$.

x	-4	3
t	0	1

Obținem: $I=\int_0^1(7t)^{-\frac{1}{6}}(7-7t)^{-\frac{5}{6}}7dt=7^{-\frac{1}{6}}\cdot7^{-\frac{5}{6}}\cdot7\int_0^1 t^{-\frac{1}{6}}(1-t)^{-\frac{5}{6}}dt=$

$$=\beta\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)=\beta\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\pi.$$

PROBLEME PROPUSE

Să se calculeze valoarea următoarelor integrale:

1. $\int_0^{\infty} x^6 e^{-3x} dx$ **R:** $\frac{80}{243}$

2. $\int_0^{\infty} x^7 e^{-x^2} dx$ **R:** 3;

3. $\int_0^1 \left(x - x^2\right)^5 dx$ **R:** $\frac{1}{2772}$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx$ **R:** $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

5. $\int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx$ **R:** $\frac{\pi}{8}$

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ **R:** $\sqrt{\pi}$

7. $\int_{-\infty}^{-1} \sqrt{(-x-1)^5}\, e^{x+1} dx$ **R:** π

8. $\int_{-1}^{0} x^2 (1+x)^3 dx$ **R:** $\frac{1}{60}$

9. $\int_{-\infty}^{0} x^5 e^x dx$ **R:** -120

10. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 - 3x + 2}{e^x} dx$ **R:** -1

11. $\int_0^1 x^{14} \left(1 - x^3\right)^6 dx$ **R:** $\frac{1}{6930}$

12. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} dx$ **R:** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

13. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ **R:** π

14. $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(1+x)^6} dx$ **R:** $\frac{1}{5}$

15. $\int_0^1 \left(x - x^2\right)^4 dx$ **R:** $\frac{1}{630}$

16. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{x^5(1-x)}} dx$ **R:** 2π

17. $\int_0^1 x(\ln x)^5 dx$ **R:** $-\frac{15}{8}$

18. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx,\ a > 0$ **R:** $\frac{\pi a^4}{16}$

19. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx$ **R:** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

20. $\int_{-\infty}^{-2} (x+2)^5 e^{x+2} dx$ **R:** -120

21. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}dx$ **R:** $\pi\sqrt{2}$ **22.** $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ **R:** $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

23. $\int_0^\infty e^{-x^n}dx;\ n>0$ **R:** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$

24. $\int_0^\infty x^m e^{-x^n}dx;\ m,n>0$ **R:** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$

25. $\int_2^\infty (x-2)^7 e^{2-x}dx$ **R:** $7!$ **26.** $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}dx$ **R:** 2

27. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\cos^5 x\,dx$ **R:** $\frac{1}{12}$ **28.** $\int_0^{+\infty} \sqrt[7]{x^5}e^{-\sqrt[7]{x}}dx$ **R:** $7\cdot 11!$

29. $\int_{-3}^0 x^4\sqrt{9-x^2}dx$ **R:** $\frac{729}{32}\pi$

30. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ **R:** $\sqrt{2\pi}$ **31.** $\int_0^\infty \frac{x^{10}}{\left(1+2x^2\right)^3}dx$ **R:** $\sqrt{2\pi}$

32. $\int_0^1 \sqrt{\ln\frac{1}{x}}dx$ **R:** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **33.** $\int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{(x+3)^5(1-x)}}$ **R:** 2π

34. $\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2}dx; n\in N$ **R:** 0, dacă n impar; $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}\sqrt{\pi}$, dacă n par

35. $\int_{-\infty}^{-1} (x+1)^3 e^{x+1}dx$ **R:** -3! **36.** $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}dx$ **R:** π

37. $\int_1^e \frac{1}{x}\ln^3 x(1-\ln x)^4 dx$ **R:** $\frac{1}{280}$ **38.** $\int_0^\infty \frac{x^4}{1+x^6}dx$ **R:** $\frac{\pi}{3}$

39. $\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ **R:** $\frac{\pi a^6}{32}$

40. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2+2x-4}\,dx$ **R:** $\frac{\sqrt{\pi}}{2e^3}$ **41.** $\int_0^{\infty} x^4\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{7}{2}}\,dx$ **R:** $\frac{4\sqrt{2}}{5}$

42. $\int_0^3 x^5\sqrt{9-x^2}\,dx$ **R:** $\frac{5832}{35}$ **43.** $\int_0^{\infty} x^{2n}e^{-x^n}\,dx; n\in N$ **R:** $\frac{n+1}{n^3}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$

44. $\int_0^{\infty} x^3e^{1-x}\,dx$ **R:** $6e$

45. $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx;\ p>0$ **R:** $\Gamma(p)$ **46.** $\int_0^{\infty}\frac{x^4}{\left(1+2x^3\right)^2}\,dx$ **R:** $\frac{\pi\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}{27}$

47. $\int_{-1}^{\infty} e^{-x^2-2x+3}\,dx$ **R:** $\frac{e^4\sqrt{\pi}}{2}$ **48.** $\int_1^{\infty}(x-1)^5e^{-(x-1)^n}\,dx$ **R:** 1

49. $\int_0^{\infty} x^ne^{-x^2}\,dx; n\in N$ **R:** **50.** $\int_0^{\infty}\frac{x^3}{1+x^8}\,dx$ **R:** $\frac{\pi}{8}$

51. $\int_{-4}^{0} x^6\sqrt{16-x^2}\,dx$ **R:** 1280π

52. $\int_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^4dx$ **R:** $\frac{1}{90}$ **53.** $\int_0^{\pi/2}\sin^4 x\cos^2 x\,dx$ **R:** $\sqrt{\pi}$

54. $\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+x)}\,dx$ **R:** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ **55.** $\int_0^1 x^8\left(1-x^3\right)^4dx$

56. $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^6}dx$ **R:** $\frac{\pi}{3}$ **57.** $\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}\left(1+x^2\right)}dx$ **R:** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

58. $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^4\right)^2}dx$ **R:** $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$

59. $\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x\,dx;\ m,n\in N$ **R:** $\frac{(m-1)!(n-1)!}{2(m+n-1)!}$

60. $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x^2+x+1}dx$ **R:** $\frac{e^{\frac{9}{8}}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ **61.** $\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$; $n\in N^*$

62. $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2x^2+4x+1}dx$ **R:** $\frac{e^3\sqrt{2\pi}}{2}$ **63.** $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$ **R:** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

64. $\int_2^{\infty}\sqrt{x-2}\,e^{2-x}dx$ **R:** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **65.** $\int_1^{\infty}x^3e^{1-x}dx$ **R:** 16

66. $\int_0^1 x^3\left(1-x^2\right)^5dx$ **R:** $\frac{1}{84}$

67. $\int_0^{\infty}\frac{x^4}{\left(1+2x^2\right)^3}dx$ **R:** $\frac{3\pi\sqrt{2}}{128}$

68. Integrala $I=\int_{-1}^{\infty}e^{-3x^2-6x+5}dx$ are forma $ke^a\pi^b$, unde $k,a,b\in R$. Să se afle valorile parametrilor k,a,b.

R: $k=\frac{\sqrt{3}}{6}$, $a=8$, $b=\frac{1}{2}$.

69. Integrala $I=\int_0^{\pi/2}\sin^2x\cos^4x\,dx$ are forma $k\pi^a$ unde

$k, a \in R$. Să se determine valorile parametrilor k şi a.

R: $k = \frac{1}{32};\ a = 1$.

70. Integrala $I = \int\limits_0^\infty x^{2,5} e^{-4x^3} dx = a\Gamma(b)$, unde $a, b \in R;\ b > 0$. Să se determine valorile parametrilor a şi b.

71. Integrala $J = \int\limits_0^1 x^{3,6} \left(1 - x^3\right)^{4,8} dx = k\beta(p, q)$, unde $k, p, q \in R;\ p, q > 0$. Să se determine valorile parametrilor k, p, q.

72. Să se calculeze $T = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx, m > 0, n > 0$.

9.2. INTEGRALE DUBLE

BREVIAR TEORETIC

Fie $D \subset R^2$ un domeniu mărginit şi $f : D \to R$ o funcție integrabilă pe D. Calculăm $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Reguli de calcul

1. Dacă D este dreptunghiul $[a,b]\times[c,d]$, atunci:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right)dy$$

2. Presupunem că D este un domeniu închis, simplu in raport cu axa Oy, adică $D = \left\{ (x,y) \in R^2 \ / \ a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x) \right\}$, iar funcția $y \to f(x,y)$ este integrabilă pe $[\alpha(x), \beta(x)]$. Atunci:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right]dx .$$

3. Presupunem că D este un domeniu închis, simplu in raport cu axa Ox, adică $D = \left\{ (x,y) \in R^2 \ / \ a \le y \le b,\ \alpha(y) \le x \le \beta(y) \right\}$, iar funcția $x \to f(x,y)$ este integrabilă pe $[\alpha(y), \beta(y)]$. Atunci:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right]dy .$$

4. Schimbarea de variabilă în integrala dublă: trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare.

Considerăm transformarea: $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$, unde $\rho \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$. Rezultă că dacă (x, y) parcurge domeniul D, atunci (ρ, θ) parcurge domeniul $D^* = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$, unde $[r_1, r_2] \subset [0, \infty)$ şi $[\theta_1, \theta_2] \subset [0, 2\pi]$. În aceste condiţii, rezultă că:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\ d\rho\, d\theta\ .$$

Observație. Dacă D este un domeniu închis şi mărginit, atunci aria suprafeţei D este: $Aria(D) = \iint_D dxdy$.

Formule ce vor fi utilizate:

- ecuația dreptei ce trece prin punctele $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2)$

este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot$

- ecuația cercului cu centrul $A(a, b)$ şi raza r este:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră $D=[0,1]\times[-1,0]$ şi $f:R\to R$, $f(x,y)=2x^2y-xy^3+1$. Să se calculeze $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Rezolvare:

$$I=\int_0^1\left(\int_{-1}^0\left(2x^2y-xy^3+1\right)dy\right)dx=\int_0^1\left[\left(x^2y^2-\tfrac{1}{4}xy^4+y\right)\Big|_{y=-1}^{y=0}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left(-x^2+\tfrac{1}{4}x+1\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{8}+x\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+1=\frac{19}{24}.$$

2. Să se calculeze $I=\iint\limits_D\left(x^2-y\right)dxdy$, unde $D=\left\{(x,y)\in R^2 / 0\le x\le 1; x-2\le y\le x^2+3x-1\right\}$.

Rezolvare:

Deoarece domeniul D este simplu în raport cu axa Oy, obținem:

$$I=\int_0^1\left(\int_{x-2}^{x^2+3x-1}\left(x^2-y\right)dy\right)dx.$$ Avem că:

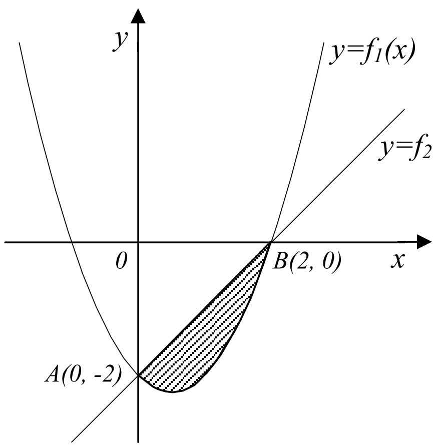
$$\int_{x-2}^{x^2+3x-1}\left(x^2-y\right)dy=\frac{1}{2}x^4-x^3-2x^2+x+\frac{3}{2},$$ prin urmare

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^4-x^3-2x^2+x+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{71}{60}.$$

3. Să se calculeze $I = \iint\limits_D dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, y \le x-2,\ y \ge x^2 - x - 2\right\}$.

Rezolvare:

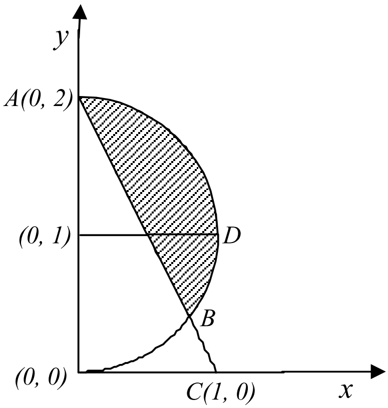
Considerăm funcțiile $f_1, f_2 : R \to R$, $f_1(x) = x^2 - x - 2$, $f_2(x) = x - 2$. Determinăm punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții, rezolvând sistemul $\begin{cases} y = x^2 - x - 2 \\ y = x - 2 \end{cases}$ şi găsim punctele $A(0,-2)$ şi $B(2,0)$. Domeniul D este dat de suprafața haşurată.



Observăm că D se mai poate exprima astfel:
$D = \left\{(x,y) \in R^2 \,/\, 0 \le x \le 2, x^2 - x - 2 \le y \le x - 2\right\}$, deci D este simplu în raport cu axa Oy. Prin urmare, integrala devine:

$$I = \int_0^2 \left(\int_{x^2-x-2}^{x-2} dy \right) dx = \int_0^2 \left(y\Big|_{y=x^2-x-2}^{y=x-2} \right) dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \frac{4}{3}.$$

4. Să se calculeze $I = \iint\limits_D x dx dy$, unde D este domeniul din figură.



Rezolvare:

- Ecuația dreptei AC este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + y = 2$.
- Ecuația cercului de centru $(0,1)$ si rază 1 este:

$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0$.

- Coordonatele punctului B se determină rezolvând sistemul:

$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \ y = 2 \\ x = \frac{4}{5}, \ y = \frac{2}{5} \end{cases}$; obținem $A(0,2)$ şi $B\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

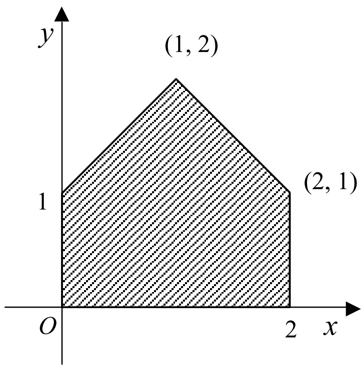
Considerăm domeniul simplu în raport cu axa Ox. Cu notațiile din breviarul teoretic, punctul 2, avem:

$a = \frac{2}{5}, \ b = 2$; $2x + y = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(2-y) \Rightarrow \alpha(y) = \frac{1}{2}(2-y)$;

$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2y - y^2} \Leftrightarrow \beta(y) = +\sqrt{2y - y^2}$. Rezultă:

$$I=\int_{\frac{2}{5}}^{2}\left(\int_{\frac{2-y}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx\right)dy=\int_{\frac{2}{5}}^{2}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{2-y}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}}\right)dy=-\frac{1}{8}\int_{\frac{2}{5}}^{2}\left(5y^2-12y+4\right)dy=\frac{32}{75}.$$

5. Să se calculeze $I=\iint\limits_{D} dxdy$, unde domeniul D este dat de suprafața hașurată.

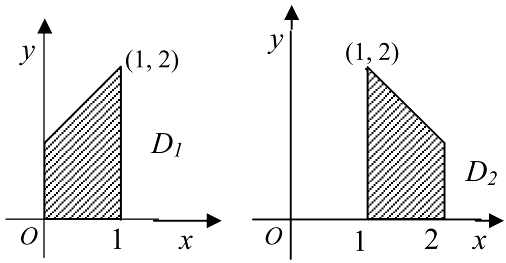


Rezolvare:

Ecuația dreptei d_1 este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y=x+1$.

Ecuația dreptei d_2 este: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y=3-x$.

Dorim să integrăm pe domenii simple în raport cu Oy. Vom descompune D în reuniune a două domenii D_1, D_2 care au interioarele disjuncte:



Pentru D_1 avem $a = 0$; $b = 1$; $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = x + 1$

$$I_1 = \iint_D dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{x+1} dy \right] dx = \int_0^1 (x+1)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Pentru D_2 avem $a = 1$, $b = 2$; $\alpha(x) = 0$, $\beta(x) = 3 - x$.

$$I_2 = \iint_D dxdy = \int_1^2 \left[\int_0^{3-x} dy \right] dx = \int_1^2 (3-x)dx = 3 - \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 = 3 - \frac{3}{2}.$$

Rezultă că $I = I_1 + I_2 = 3$.

6. Să se calculeze $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, unde

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \big/ 4 \le x^2 + y^2 \le 9; y \ge 0 \right\}.$$

Rezolvare:

Folosim trecerea la coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \in [0, \infty), \ \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{cases} 4 \le x^2 + y^2 \le 9 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

Vom avea: $D^* = \{(\rho,\theta) \in R^2 / 2 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le \pi\}$ şi $dxdy = \rho \cdot d\rho d\theta$.

$$I = \iint_{D^*} \rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \left(\int_2^3 \rho^2 d\rho \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} 19 d\theta = \frac{19}{3}\pi .$$

7. Să se calculeze aria discului de rază r, unde $r > 0$.

Rezolvare:

Avem de calculat aria domeniului $D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le r^2\}$. Conform observației din breviarul teoretic, aria domeniului D este egală cu $\iint_D dxdy$.

Folosim trecerea la coordonatele polare :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \in [0, \infty), \ \theta \in [0, 2\pi]$$

$(x, y) \in D \Rightarrow x^2 + y^2 \le r^2 \Rightarrow \rho \in [0, r], \ \theta \in [0, 2\pi]$. Prin urmare, $D^* = \{(\rho,\theta) \in R^2 / 0 \le \rho \le r, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ şi $dxdy = \rho \cdot d\rho d\theta$. Prin urmare,

$$\iint_D dxdy = \iint_{D^*} \rho \, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \rho \, d\rho \right) d\theta = \frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi r^2 .$$

8. Să se calculeze $I = \iint_D e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$ unde $D = \{(x, y) \in R^2 / 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ 0 \le x \le y\}$.

Rezolvare:
Folosim trecerea la coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \ \rho \in [0,\infty); \theta \in [0,2\pi].$$

$$(x,y) \in D \Rightarrow 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le y \Rightarrow \rho \in [1,\ 2],\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right].$$

Avem: $D^* = \left\{(\rho,\theta) \in R^2 \big/ 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$ şi

$dxdy = \rho \cdot d\rho d\theta$. Rezultă:

$$I = \iint_{D^*} e^{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta}} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho e^{\rho} d\rho \right) d\theta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho e^{\rho} \Big|_1^2 - \int_1^2 e^{\rho} d\rho \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2e^2 - e - e^2 + e\right) d\theta = e^2\theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \cdot e^2 .$$

PROBLEME PROPUSE

1. Să se calculeze $\iint_D \left(5x^3y - 2xy + 7\right) dxdy$ unde $D = [-2,0] \times [1,2]$. **R:** -10.

2. Să se calculeze $\iint_D \left(x + \frac{y}{x} \right) dxdy$ unde $D = \left\{(x,y) \in R^2 \big/ 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x - 1\right\}$. **R:** $\frac{14}{3} + \frac{1}{2}\ln 3$.

3. Să se calculeze $\iint_D \frac{1}{x + y + 1} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in R^2 \big/ y - x \le 1,\ x + y \le 3;\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$. **R:** $2 - \ln 2$.

4. Să se calculeze $\iint_D (2xy + x - 3)y\,dxdy$

unde $D = \{(x, y) \in R^2 / 1 \le x \le 2;\ x^2 + 1 \le y \le x^2 - x + 3\}$. **R:** $\frac{4}{15}$.

5. Să se calculeze $\iint_D \frac{y-4}{\sqrt{x}}\,dxdy$ unde

$D = \{(x, y) \in R^2 / 1 \le x \le 4,\ 2x - 1 \le y \le x^2 + 1\}$. **R:** $\frac{229}{9}$.

6. Să se calculeze $\iint_D \frac{y}{x}\,dxdy$, unde

$D = \{(x, y) \in R^2 / 1 \le x \le 2,\ 2x - 1 \le y \le x^2\}$. **R:** $\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\ln 2$.

7. Să se calculeze $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ unde unde

$D = \{(x, y) \in R^2 / x^2 + y^2 \le 16, x \ge 0, y \ge 0\}$. **R:** $\frac{(1 - e^{-16})\pi}{4}$.

CAPITOLUL 10
ECUAȚII DIFERENȚIALE

BREVIAR TEORETIC

Ecuații diferențiale de ordinul I

- Forma implicită: $F(x, y, y') = 0, \quad F: D \subset R^3 \to R, \ x \in I \subseteq R$, funcția necunoscută fiind $y = y(x)$, derivabilă, cu derivata $y' = y'(x)$.
- Forma explicită: $y' = f(x, y)$

A rezolva o ecuație diferențială presupune a determina o funcție $y = \varphi(x), \ \varphi: I \to R$, astfel încât $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$; în aceste condiții, spunem că funcția $y = \varphi(x, C), \ C \in R$ este *soluția generală* a ecuației.

Pentru o anumită valoare a lui C, funcția $y = \varphi(x)$ se numeşte *soluție particulară* a ecuației.

- *Problema lui Cauchy* pentru ecuația $F(x, y, y') = 0$ constă în determinarea unei soluții particulare a ecuației, care verifică condiția inițială $y(x_0) = y_0, \ x_0 \in I, \ y_0 \in R$.

I. ECUAȚII DIFERENȚIALE CU VARIABILE SEPARABILE

Forma generală este:

$y' = f(x) \cdot g(y), \quad f: (a, b) \to R, \quad g: (c, d) \to R; \quad f, g$ continue şi $g(y) \neq 0, \ \forall y \in (c, d)$.

II. ECUAȚII DIFERENȚIALE OMOGENE

Forma generală este: $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$, $g:(a,b)\to R$ continuă.

Această ecuație se rezolvă astfel:

Se face înlocuirea $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx,\ y' = z'x + z$ şi se obține o ecuație diferențială cu variabile separabile.

III. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL I

Forma generală este:

$y' = P(x)y + Q(x),\quad P,Q:(a,b)\to R$ continue.

Această ecuație se rezolvă în doi paşi :

$i)$ se determină soluția ecuației omogene ataşate: $y' = P(x)y$, care este o ecuație diferențială cu variabile separabile;

$ii)$ se aplică metoda variației constantelor.

IV. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE TIP BERNOULLI

Forma generală este:

$y' = P(x)y + Q(x)y^{\alpha}, \alpha \in R \setminus \{0,1\},\quad P,Q:(a,b)\to R$ continue.

Această ecuație se rezolvă în doi paşi:

1) se împarte ecuația prin y^{α} şi rezultă:

$$\frac{1}{y^{\alpha}}y' + \frac{1}{y^{\alpha-1}}P(x) + Q(x) = 0.$$

2) se notează $y^{1-\alpha} = z \Rightarrow (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'$ şi după înlocuire se obține o ecuație diferențială liniară de ordinul I.

PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale: $y' = \frac{xy}{x^2+1}$ şi soluția particulară care trece prin punctul $(0,1)$.

Rezolvare:
Observăm că aceasta este o ecuație diferențială cu variabile separabile.

Se separă variabilele şi rezultă: $\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+1}$.

Integrând în raport cu x, obținem:

$$\int \frac{1}{y} y'\,dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx + c, c \in R \Rightarrow \ln|y| = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln C,\ C > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln\left(C\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow |y| = C\sqrt{x^2+1} \Rightarrow y = \pm C\sqrt{x^2+1},$$

sau $y = K\sqrt{x^2+1}, K \in R$.

Soluția generală sub *formă explicită* a ecuației diferențiale este:

$$y = y(x, K) = K\sqrt{x^2+1},\quad K \in R^*.$$

Înlocuind $x = 0$ şi $y = 1$ în soluția generală se obține $K = 1$, deci soluția particulară a ecuației diferențiale este: $y = y(x) = \sqrt{x^2+1}$.

2. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale: $y'(y+1)(x+1) = x(y+1) - x$.

Rezolvare:
Ecuația se mai poate scrie sub forma:

$y'(y+1)(x+1) = xy \Leftrightarrow \frac{y+1}{y} y' = \frac{x}{x+1}$, care este o ecuație cu variabile separabile. Integrăm în raport cu x şi obținem:

$$\int \frac{y+1}{y} y' dx = \int \frac{x}{x+1} dx + c,\ c \in R \Rightarrow y + \ln|y| = x - \ln|x+1| + \ln C$$

$$\Rightarrow \ln|y(x+1)| = x - y + \ln C,\ C > 0 \Rightarrow \ln \frac{|y(x+1)|}{C} = x - y \Rightarrow$$

$$|y(x+1)| = Ce^{x-y},\ C > 0 \Rightarrow y(x+1) = \pm Ce^{x-y},\ C > 0.$$

Rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale sub *formă implicită* este: $y(x+1) = Ke^{x-y},\quad K \in R^*$.

3. Să se integreze următoarea ecuație diferențială:
$x^2 + 2y^2 = xyy'$.

Rezolvare:
Ecuația se mai poate scrie sub următoarea formă echivalentă:

$$y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}.$$

Aceasta este o ecuație diferențială omogenă. Folosim substituția:
$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx,\ y' = z'x + z$ şi se obține ecuația:

$$z + xz' = \frac{x^2 + 2z^2x^2}{zx^2} \Rightarrow z + xz' = \frac{1 + 2z^2}{z} \Rightarrow$$

$$z'x = \frac{1+z^2}{z} \Rightarrow \frac{z}{z^2+1} z' = \frac{1}{x}$$

Integrăm această ecuație cu variabile separabile:

$$\int \frac{z}{z^2+1} z' dx = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln|x| + \ln C, C > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{1+z^2} = C|x|$. Revenind la substituția $z = \frac{y}{x}$, avem:

$\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=C|x|$. Rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale este: $\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2, C>0$.

4. Să se rezolve următoarea ecuație diferențială: $y'\cos x-2y\sin x=\cos x$ și să se determine soluția particulară care trece prin punctul $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$.

Rezolvare:

Împărțim ecuația prin $\cos x\neq 0$ și obținem:

$y'=2ytgx-1$ (1), $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$, care este o ecuație diferențială liniară de ordinul I.

i) Rezolvăm ecuația omogenă atașată:

$$y'=2ytgx\Leftrightarrow\frac{1}{y}y'=2tgx\Leftrightarrow\int\frac{1}{y}y'dx=\int 2tgxdx+c,\ c\in R\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln|y|=-2\ln|\cos x|+\ln K,\ K>0\Rightarrow\ln\frac{|y|}{K}=\ln\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{|y|}{K}=\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow|y|=\frac{K}{\cos^2 x}, K>0\Rightarrow y=\frac{\pm K}{\cos^2 x},\ K>0,$$

sau $y=\frac{C}{\cos^2 x},\quad C\in R^*$.

ii) Aplicăm metoda variației constantelor și rezultă:

$$y=\frac{C(x)}{\cos^2 x}\Rightarrow y'=\frac{C'(x)\cos^2 x+2\sin x\cos xC(x)}{\cos^4 x}=$$

$$\frac{C'(x)\cos x+2\sin xC(x)}{\cos^3 x}.$$

Înlocuim y şi y' în ecuația (1) şi obținem:

$$\frac{C'(x)\cos x + 2\sin x C(x)}{\cos^3 x} = 2\frac{C(x)}{\cos^2 x}tgx + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{C'(x)}{\cos^2 x} - 1 = 0 \Rightarrow C'(x) = \cos^2 x \Rightarrow C(x) = \int \cos^2 x dx =$$

$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx + C_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1$; soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$y = y(x, C_1) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x},\ C_1 \in R.$$

Punând condiția ca $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$, obținem:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + C_1\right)\cdot 2 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Rezultă soluția particulară: $y = y(x) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$.

5. Să se integreze următoarea ecuație diferențială**:**

$$y' + y\cdot ctgx + y^3 = 0, x \neq k\pi, k \in Z.$$

Rezolvare:

Se observă că aceasta este o ecuație diferențială de tip Bernoulli, cu $\alpha = 3$.

1) Împărțim ecuația prin y^3 şi rezultă: $\frac{1}{y^3}y' + \frac{1}{y^2}ctgx + 1 = 0$. (1)

2) Notăm $y^{1-3} = z \Leftrightarrow y^{-2} = z \Rightarrow -\frac{2y'}{y^3} = z' \Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2}$.

Prin înlocuire în (1) obținem:

$-\frac{z'}{2} + z\cdot ctgx + 1 = 0 \Leftrightarrow z' = 2z\cdot ctgx + 2$ (2), care este o ecuație diferențială liniară de ordinul I.

i) Rezolvăm ecuația omogenă atașată:

$$z' = 2z \cdot ctgx \Leftrightarrow \frac{1}{z}z' = 2ctgx \Rightarrow \int \frac{1}{z}z'\,dx = 2\int ctgx\,dx + c,\ c \in R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z| = 2\ln|\sin x| + \ln C,\ C > 0 \Rightarrow$$

$$\ln\frac{|z|}{C} = \ln\sin^2 x \Rightarrow |z| = C\sin^2 x,\quad C > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \pm C\sin^2 x,\ C > 0 \Rightarrow z = K\sin^2 x,\ \ K \in R^*.$$

ii) Aplicăm metoda variației constantelor:

$$z = K(x)\sin^2 x \Rightarrow z' = K'(x)\sin^2 x + 2\sin x\cos xK(x).$$

Înlocuind în (2), obținem:

$$K'(x)\sin^2 x + 2\sin x\cos xK(x) = 2K(x)\sin^2 x \cdot ctgx + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K'(x)\sin^2 x = 2 \Rightarrow K'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} \Rightarrow K(x) = 2\int\frac{1}{\sin^2 x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K(x) = -2ctgx + C_1.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale liniare de ordinul I este:

$$z = K(x)\sin^2 x = \left(-2ctgx + C_1\right)\sin^2 x = -2\sin x\cos x + C_1\sin^2 x$$

sau $z = -\sin 2x + C_1\sin^2 x,\ C_1 \in R$.

Revenind la substituția $z = \frac{1}{y^2}$, obținem soluția generală a ecuației Bernoulli: $y^2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{-\sin 2x + C_1\sin^2 x},\ C_1 \in R$.

PROBLEME PROPUSE

Să se determine soluția generală pentru următoarele ecuații diferențiale şi soluția particulară care trece prin punctul indicat:

1. $y' = \dfrac{x(2y-1)}{(x^2+1)}$, (1,1).

R: $y(x,C) = C\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2},\ C \in R\,;\ y(x) = \frac{1}{4}\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}$.

2. $2yy' = (3x+2)(y^2+4)$, $\left(2, \sqrt{e^2-4}\right)$.

R: $\frac{1}{2}\ln\left(y^2+4\right) = \frac{3}{4}x^2 + x + C,\ C \in R\,;\ C = -4$.

3. $(3x-4)y^2y' + (y^2+1) = 0$, (1,0).

R: $y - arctgy = -\frac{1}{3}\ln|3x-4| + C,\ C \in R\,;\ C = 0$.

4. $e^{x+y}y' - (2x-1)e^{x^2} = 0$, (0,1).

R: $y(x,C) = \ln\left(e^{x(x-1)} + C\right),\ C \in R\,;\ C = e-1$.

5. $y'\cos x + \sin x \sin^2 y = 0,\ (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$;

6. $2x^2yy' = y^2 + 1$, (1,5).

Să se determine soluția generală a următoarelor ecuații diferențiale:

7. $x^2 + 2y^2 = xyy'$ **R:** a) $y^2(x,C) = Cx^4 - x^2,\ C \in R$

8. $x^2(2y'+1) + y^2 = 0$ **R:** $x = Ce^{\frac{2x}{x+y}},\ C \in R$;

9. $y' = \dfrac{3x+4y}{4x+3y}$ **R:** $x + y = C(y-x)^7,\ C \in R$.

Să se rezolve următoarele ecuații diferențiale și să se afle soluția particulară care trece prin punctul indicat:

10. $y'+4x^3y=x^3$, $(0,1)$; **R:** $y(x,C)=\frac{1}{4}\frac{e^{x^4}+4C}{e^{x^4}}$, $C\in R$; $C=\frac{3}{4}$.

11. $y'\cos x-2y\sin x=\cos x$, $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$.

12. $y'+3y=6xe^{-x}$, $(0,3)$;

R: $y(x,C)=\frac{(6x-3)e^{-x}+2Ce^{-3x}}{2}$, $C\in R$; $C=\frac{9}{2}$.

13. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$, $(0,1)$;

R: $y(x,C)=\left(x^2+C\right)e^{-x^2}$, $C\in R$; $C=1$.

Să se integreze următoarele ecuații diferențiale:

14. $6y^2y'+xy^3=2x$; **R:** $y(x,C)=\sqrt[3]{e^{-\frac{1}{4}x^2}+2}$, $C\in R$.

15. $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$; **R:** $x=Ce^{\frac{2\sqrt{y}}{x^2}}$, $C\in R$.

16. $y'+xy-y^2x=0$; **R:** $y(x,C)=\frac{1}{Ce^{\frac{1}{2}x^2}+1}$, $C\in R$.

17. $xy'+2y=x^5y^3e^x$; **R:** $y^2(x,C)=\frac{1}{x^4\left(C-2e^x\right)}$, $C\in R$.

BIBLIOGRAFIE

1. CENUŞĂ, GH., V. BURLACU, R. COROI, TOMA, M., FILIP, A. ş.a., Matematici aplicate în economie, Tipografia A.S.E., 1990

2. CENUŞĂ, GH., FILIP, A., RAISCHI, C. ş.a., Matematici pentru economişti, Editura Cison, Bucureşti, 2000

3. CENUŞĂ, GH., NECULĂESCU, C., Elemente de algebră liniară pentru economişti, Editura A.S.E., Bucureşti, 1998

4. CENUŞĂ, GH., RAISCHI, C., BAZ, D., TOMA, M., BURLACU, V., SĂCUIU, I., MIRCEA, I., Matematici pentru economişti, Editura Cison, Bucureşti, 2000

5. CHIRIȚĂ, S., Probleme de matematici superioare, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1989

6. COROI, R., WOINAROSKI, S. ş.a., Culegere de probleme de matematică, Lito, A.S.E., 1988

7. FILIP, A., Matematici aplicate în economie, Editura A.S.E., Bucureşti, 2002

8. LANCASTER, K., Analiză economică matematică, Editura ştiințifică, 1973

9. ION, D. I., RADU, N., Algebra, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1991

10. NICOLESCU, M., DINCULEANU, N., MARCUS, S., Analiză matematică, vol. I, II, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971

11. NIȚĂ, C., NĂSTĂSESCU, C., VRACIU, C., Bazele algebrei, Editura Academiei R.S.R., 1986

12. POPESCU, O., Matematici aplicate în economie, vol. I, II, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1993

13. PURCARU, I., Elemente de algebră şi programare liniară, Editura ştiințîfică şi enciclopedică, Bucureşti, 1982

14. PURCARU, I., Matematici generale şi elemente de optimizare, Editura economică, Bucureşti, 1997

15. RAISCHI, C., MANU-IOSIFESCU, L., BAZ, S., IFTIMIE, B., Analiză matematică: culegere de probleme, Editura A.S.E., Bucureşti, 1999
16. ROŞCULEȚ, M., Analiză matematică, vol. I, II, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1966
17. SĂCUIU, I., MOSCOVICI, E., POPESCU, AL., Culegere de probleme de matematici aplicate în economie, Lito A.S.E., 1991
18. SIREȚCHI, G., Analiză matematică, vol. I, II, Lito Universitatea Bucureşti, 1982
19. ŞTEFĂNESCU, A., ZIDĂROIU, C., Cercetări operaționale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981
20. TOMA, A., Algebră liniară: culegere de probleme, Editura Economică, Bucureşti, 2002